

Math. O.

424.

1354

—

ÉRTEKEZÉSEK

A

MATHEMATIKAI TUDOMÁNYOK KÖRÉBŐL.

KIADJA

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA.

MÁSODIK KÖTET. 1872—1878.

A III. OSZTÁLY RENDELETÉBŐL

SZERKESZTI

SZABÓ JÓZSEF

OSZTÁLYTITKÁR.

BUDAPEST, 1875.

A. M. TUD. AKADÉMIA KÖNYVKIADÓ-HIVATALA.

(Az-Akadémia épületében.)

301354

M. ACADEMIA
KÖNYVTÁRA

Budapest, 1875. Nyomatott az Athenaeum r. társ. nyomdájában.

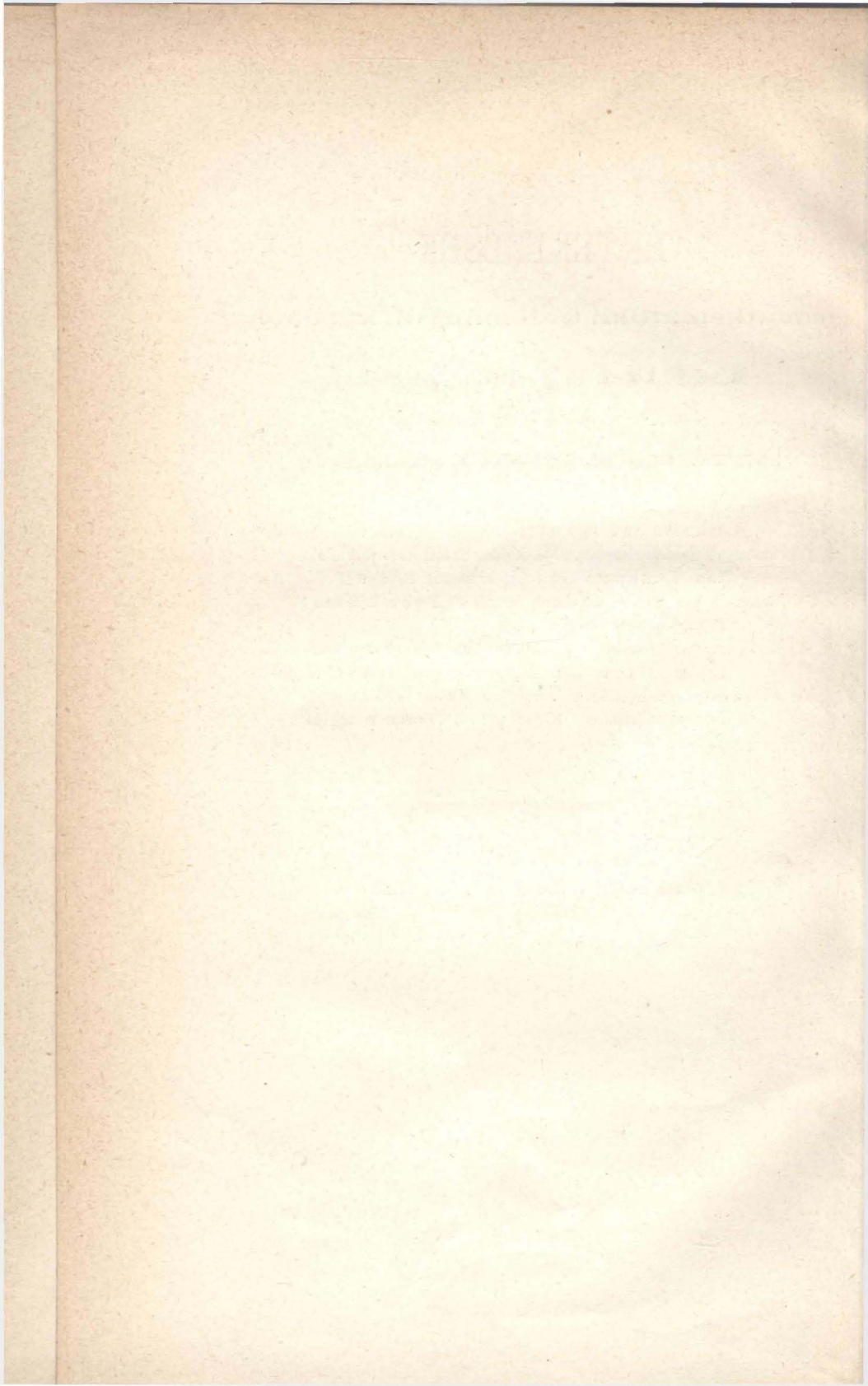
ÉRTEKEZÉSEK

a matematikai tudományok köréből.

Második kötet. 1872—1873. (Ára 80 kr.)

	Ára*)
I. Szám. Freia bolygó feletti értekezés. Murmann Ágostontól. 1872. 61 l.	30 kr.
II. Szám. A comparatorokról. Kruspér István r. tagtól. 1873. 19 l. Egy táblával	10 kr.
III. Szám. A vonásos hossz mértékek összehasonlítása folyadéokban. Kruspér István r. tagtól. 1873. 9 l.	10 kr.
IV. Szám. A közlekedési művek és vonalak. Fest Vilmos r. tagtól. 1873. 45 l.	20 kr.
V. Szám. Az Az 1861-ki nagy üstökös pályájának meghatározása. Murmann Ágostontól. 1873. 65 l.	20 kr.
VI. Szám. A párisi levéltári méterrúd véglapjain lévő mélyedések megméréseiről. Kruspér István r. tagtól. 1873. 9 l.	10 kr.

*) Az újból megállapított leszállított árak szerint.



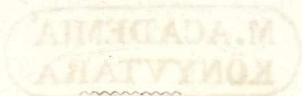
FREIA BOLYGÓ

FELETTI

ÉRTEKEZÉS.

DR. MURMANN ÁGOST

A PRÁGAI CSILLAGDA SEGÉDJÉTŐL.



(Bemutattatott a III. osztály ülésén 1871. jun. 19.)

PEST.

EGGENBERGER FERDINÁND M. AKAD. KÖNYVÁRUSNÁL.

(HOFFMANN ÉS MOLNÁR.)

1871.

M. ACADEMIA
KÖNYVTÁRA

Pest, 1871 Nyomatott az „Athenaeum“ nyomdájában.

FREIA BOLYGÓ FELETTI ÉRTEKEZÉS.

Dr. MURMANN ÁGOST

A PRÁGAI CSILLAGDA SEGÉDJÉTŐL.

(Bemutatott a III. osztály ülésén 1871. jun. 19.)

Freia bolygó, a kis bolygók 76-dika, 1862. október 24-dikén fedeztetett fel Koppenhágában d'Arrest igazgatótól. Rendkívül rossz idő s csekély fényhatályossága következtében ezen bolygó csak november végeig volt nyomozható Koppenhágában, míg a többi csillagdák közül csak Berlinben sikerült november 27-dikén egy észlelet. Ezen körülményekből igen valószínűnek látszott, hogy a bolygó következő szembenállásakor csak a legnagyobb fáradtsággal lesz feltehető, miután az észleletek csekély száma s az elemek szokatlan meghatározhatatlansága, a mint ez d'Arrest kutatásaiból kitűnt, még a legközepeszerűbb előreszámítást sem engedék kivinni. Történt azonban, hogy Pogson Madrasban 1864. február havában egy bolygót fedezett fel, melynek — a párisi bulletinekben megjelent észleleteiből kiszámított — látzólagos mozgása Luther-től Bilkben olyannak ismertetett, a milyennel Freia bolygónak kellendett birnia, s ebből következtetve azt állítja Luther, miszerint a Pogson-féle bolygó nem új, hanem alkalmasint a fennevezett Freia. Oppolzer ezen feltevést az „Astronomische Nachrichten“ 1471-dik számában bebizonyította s megmutatá, hogy d'Arrest észleletei 1862-ben és Pogson-éi 1864-ben, valamint az ezen idő óta Bécsben történt észleletek is ugyanazon egy elemrendszer által állithatók elő. Én e bolygó feletti számításaimat

avval kezdtem meg, hogy a bolygó első két megjelenésekor történt észleletekből kiszámítottam az 1865-diki szembenállást, s ezen időben egyszersmind megbizatva lévén a bécsi csillagda nagyobbik refraktorán teendő észlelésekkel, Freia bolygót lehetőleg gyakran észlelni törekedtem.

A bolygó azonban ezen hat hüvelyknyi (tárgylencséjű) távcsőben a láthatóság végső határán vala s a 17 észlelet, mely 1865. márczius 21-dikétől egészen május 21-dikéig igen nagy fáradsággal sikerült, csak az által nyerhetett igen kielégítő szorosságot, hogy igen számos (középszámban 12) a bolygó s az összhasonlítani csillag közötti összhasonlítást foglaltam egy észleletbe. Freia fényhatályosságát 1865. április 22-dikén 12.0-nagyságúnak becsleltem, a mi négy más észlelőtől történt megbecsléssel együtt középszámban 12.2 nagyságu közép fényhatályossághoz vezet. Ezen érték a bolygó egy keringése számára a következő fényhatályosságokat adta :

szembenáll.	fényhatály.	elhajlás
1862. október 18	11.7 nagys.	+10°
1864. január 29	11.3	+15
1865. április 19	12.4	—11
1866. június 11	13.0	—21
1867. július 29	12.8	—16
1868. septbr. 28	12.0	+ 4,

a miből az tűnt ki, hogy a bolygó 1866. és 1867-diki szembenállásakor tekintélyes mérvben még gyöngébb lesz, s hogy nagy déli elhajlása még fokozni fogja az észlelés nehézségét. Valóban az 1866-diki szembenállás észleleti anyaga egyedül három clintoni észleletből áll, mialatt 1867-ben a bolygó Clintonban négyszer, Berlinben kétszer és Washingtonban csak egyszer észleltetett, s fényhatályosságára nézve azt jegyezte meg 1867-ben Peters C. H. F., a clintoni észlelde igazgatója, hogy az a fentt kitettnél talán kevésbé gyöngébbnek is látszott lenni.

Az ily csekély fényhatályosságu égi testeknél az észlelő — kétségnélkül — azon fog lenni, hogy az észleletek sokasítása által (p. a bolygó összhasonlításában a csillagokkal)

lehet" képen hason szorosságu észleleteket hozhasson létre, a minők nagyobb fényhatályosságu tárgyaknál könnyebb uton szerezhetők. I. meretes ugyan, hogy igen gyöngé fényű tárgyaknál az észlelések nagyobb szembeli (subjectiv) különbségek- vagyis állandó hibákkal járnak, de ezen körülményben az észlelő csak egy második indokot találhat arra, hogy annál szorosabb helyhatározásokat törekedjék kivinni. A számító továbbá, gyöngé fényű testnek kevés észleletéből pályát határozandó, azt fogja szem előtt tartani, hogy lehető legbiztosabb eredményt származtasson le, úgy, miszerint ez járuléka legyen annak, hogy minő szorossággal elégíthetők ki az észleletek egy elemrendszer által még ily kedvezőtlen körülményekben is. Freia feletti számításaimban ezen szempontból indulván ki, bátorkodom imitt ezen bolygónak hat első észlelt szembenállását eléterjeszteni oly részletekkel, melyek a számítás pontosságának megbírálását engedik, s egyszersmind jövőbeni kutatásaimban segítségemre szolgálnak. Továbbá az elemrendszer-javításokra nézve jónak találtam azokat is leírni, melyek a szigorú javítást megelőzték, s pedig oly végből, hogy valamennyi alkalmazásra került elemrendszer leszármazása ismeretes legyen. Végre egy utolsó cikket ama constansok tárgyalására szántam, melyek a földközépi helynek leszármaztatására szolgálnak, s még néhány oly számbeli képletet függesztettem hozzá, mely a jövőben, mikor ez értekezés végleges elemeit ismét javítandottam, alkalmazásba fog jönni.

A naplók.

A szorosan számított naplók abban különböznek a pályajavítás számításában előforduló többi számsortól, mint p. a háborok-, a napösszrendezők- s különféle más adatoktól, hogy mialatt ez utóbbiak olykor kis mennyiségekkel változott, azaz szorosabb értékeket vehetnek fel, a naplók még későbbben megjelenő észleletek összehasonlítására vagy akármily más használatra folyton megtartathatnak, ha csak eltéréseik a bolygó látszólagos pályájától eléggé kicsinyek. A naplók tehát az egész számításnak egy állandó alapját képezik s így nem

tekinthető igazolatlanul, hogy azokat az ivmásodpercz század részéig számítottuk ki, s hogy egyforma szorosságot alkalmazván számításunk egész folyamatában, az észleleteket is mindig az eredeti naplókkal a nevezett jegyig hasonlítottuk össze. Alig kétséges ugyan, hogy az egyes bolygóészleleteknél az ivmásodpercz tizedrészei is fedeztetnek az észleleti hibák által, de mindamellett kívánatos, hogy a számítás végeredményeiben az ivmásodpercz első tizedesében némi biztossággal egyéb befolyás ne tükrözzék, mint lehetőleg azon felvételek, melyeken a számítás épült: tehát biztosságból s kényelmességből is, mind ott, hol a számítás magában véve egészen biztos, mind ott, hol ez (mint p. a földközepi hely leszármaztatásában) a másodpercz első tizedesét sem adhatja mindég teljes biztossággal (7 jegyü logarokkal), elfogadjuk az ivmásodpercz másod tizedeséveli számítást.

Az előbbieknél fogva illőnek látszanék, hogy a naplókat is, melyeknek csak egy része s ez is csak az időmásodpercz század részéig, vagy az ivmásodpercz tized részéig van **taz Astr. Nachr.** vagy a berlini évkönyvben közölve, s pedig eredeti alakjukban felhoznók; de az így eredendő számtár terjedtsége mégis visszatartóztatott; elhatároztuk tehát itt nem a naplókat magokat, hanem csak a közvetlen számított helyeket, melyek közbeiktatása által amazok eredtek, közölni, mi által az egész számtár negyed részére szállított le.

Az elemek s a többi számadatok, melyeken a naplók alapszanak a következő táblán láthatók:

Napló	elemek	napösszrendezők	háborok	reductio
1862	1	Hansen	berlini évkönyv
1864	1	berlini évkönyv	
1865 a	2		A	
1865 b	2'		A	
1866	2'		A	
1867	2'		B	
1868	3		B	

berlini 0 ^b	l á t s z ó l a g o s				földtöli táv	
	egyen es emelk.		elhajlás		log. .	
1862 októb. 24	22° 33'	29."05	+9° 48'	59."76	0.312479	
28	21 50	36.40	29	34.32	0.313107	
novbr. 1	21 9	28.73	10	41.31	0.314696	
5	20 30	49.41	+8 52	39.87	0.317207	
9	19 55	16.59	35	47.78	0.320589	
13	19 23	23.95	20	20.89	0.324787	
17	18 55	41.38	6	33.76	0.329734	
21	18 32	35.48	+7° 54	39.11	0.335360	
25	18 14	26.65	44	46.81	0.341583	
29	18 1	30.40	37	4.45	0.348320	
1864 február 2	130° 49'	22."81	+14° 59'	10."25	0.269606	
6	130 2	27.72	+15 12	23.14	0.271825	
10	129 17	25.11	25	23.39	0.275091	
14	128 35	9.16	37	57.01	0.279352	
18	127 56	27.73	49	51.90	0.284542	
22	127 21	59.98	+16 0	58.32	0.290580	
26	126 52	17.39	11	8.61	0.297383	
márcz. 1	126 27	44.98	20	16.11	0.304868	
5	126 8	43.48	28	15.24	0.312949	
9	125 55	27.42	35	1.58	0.321537	
13	125 48	5.41	40	31.89	0.330543	
17	125 46	38.47	44	44.43	0.339879	
21	125 51	1.56	47	38.48	0.349466	
25	126 1	5.13	49	14.04	0.359235	
29	126 16	38.35	49	31.05	0.369126	
április 2	126 37	29.32	48	29.45	0.379085	
6	127 3	25.54	46	8.95	0.389062	
10	127 34	12.78	42	30.12	0.399010	
14	128 9	34.47	37	33.52	0.408888	
18	128 49	12.66	31	20.56	0.418660	
22	129 32	49.21	23	52.43	0.428300	
26	130 20	7.15	15	10.18	0.437787	
30	131 10	51.60	5	14.49	0.447103	
május 4	132 4	48.60	+15 54	6.07	0.456232	
8	133 1	44.27	41	45.73	0.465157	

berlini 0 ^b		l á t s z ó l a g o s				földtéli táv	
		egyenes emelk.		elhajlás		log.	
1865 május	12 134°	1'	24."27	+15°	28	14.83	0.473864
márcz.	20 211	45	41.01	—13°	16	9.17	0.422079
a	24 211	15	58.85		4	16.07	0.417833
	28 210	42	49.31	—12	51	1.45	0.414215
április	1 210	6	41.31		36	34.07	0.411280
	5 209	28	7.69		21	4.50	0.409072
	9 208	47	42.99		4	44.59	0.407623
	13 208	6	2.55	—11	47	46.86	0.406958
	17 207	23	42.23		30	24.85	0.407092
	21 206	41	19.32		12	52.74	0.408032
	25 205	59	31.53	—10	55	25.57	0.409774
	29 205	18	56.96		38	18.75	0.412301
május	3 204	40	11.21		21	46.91	0.415581
	7 204	3	43.18		6	3.60	0.419572
b május	7 204°	5'	59."33	—10°	6'	49."62	0.419345
	11 203	32	18.09	—	9 52	6.11	0.423993
	15 203	1	42.69		38	33.32	0.429250
	19 202	34	35.36		26	20.30	0.435064
	23 202	11	11.56		15	34.94	0.441377
	27 201	51	44.51		6	23.50	0.448134
	31 201	36	23.76	—	8 58	50.63	0.455253
1866 május	26 262°	44'	59."00	—21°	21'	57."05	0.479543
	30 262	3	25.22		18	22.92	0.477321
junius	3 261	20	11.05		14	42.49	0.475748
	7 260	35	47.89		10	56.98	0.474846
	11 259	50	49.77		7	8.10	0.474631
	15 259	5	52.41		3	18.13	0.475108
	19 258	21	32.18	—20	59	29.95	0.476273
	23 257	38	23.52		55	46.92	0.478107
	27 256	56	57.76		52	12.37	0.480587
julius	1 256	17	42.99		48	49.84	0.483682
	5 255	41	5.03		45	42.80	0.487358
	9 255	7	27.84		42	54.45	0.491578
	13 254	37	13.36		40	28.16	0.496293
	17 254	10	40.05		38	26.73	0.501465

berlini 0 ^a	l á t s z ó l a g o s						földtéli táv
	egyenes emelk.			elhajlás			log.
1867 julius	23	310°	3' 11."95	—15°	32' 52."08	0.45	982
	27	309	20	51.04	43	17.56	0.457529
	31	308	37	54.33	53	58.42	0.456787
august.	4	307	54	56.86	—16	4	45.88 0.456764
	8	307	12	34.65	15	31.15	0.457455
	12	306	31	21.79	26	6.27	0.458844
	16	305	51	49.68	36	23.96	0.460907
	20	305	14	27.58	46	17.57	0.463616
	24	304	39	43.26	55	41.20	0.466938
	28	304	8	2.71	—17	4	29.48 0.470832
sept.	1	303	39	49.65	12	37.64	0.475253
	5	303	15	24.05	20	1.79	0.480148
1868 sept.	8	8°	56'	35."35	+ 5°	21' 58."41	0.371788
	12	8	22	41.38	6	29.07	0.366768
	16	7	45	59.78	+ 4	49	34.19 0.362495
	20	7	7	4.18	31	27.42	0.359025
	24	6	26	32.44	12	24.61	0.356402
	28	5	45	4.47	+ 3	52	43.10 0.354654
októb.	2	5	3	20.32	32	41.02	0.353796
	6	4	21	59.77	12	36.54	0.353834
	10	3	41	42.95	+ 2	52	48.21 0.354762

Az észleleti anyag.

Freia bolygó észleleti anyaga oly csekély, hogy jónak tartjuk, az egyes észleleteket magokat is, melyeken számításaink alapulnak, felhozni. Minél kisebb ugyanis az észleletek száma, annál kíváncsiabb, hogy mindenki meggyőződhessék, miszerint az észleletek szorosabb vagy kevésbé szoros megegyezése valóban az észlelőktől adott számokból folyik, s egyáltalában azon műtétek helyes voltáról is, melyek által az észleletek normalhelyekké foglaltattak össze.

észl. hely közép ideje	észl. hely	l. egy. emelkedés	látköz	l. elhajlás	látköz
1862 október 24 9 ^a 16 ^m	58	Koppenhága	22° 29' 37.0	—1.25	
24 10 1 50	50	"	22 29 12.6	—0.81	
24 11 31 25	25	"	22 28 24.4	+0.15	+3.10
30 9 16 56	56	"	21 26 6.6	—0.98	
novemb. 1 9 21 32	32	"	21 5 54.2	—0.84	
14 11 40 42	42	"	19 12 42.0	+1.19	
20 10 44 54	54	"	18 35 48.8	+0.89	
21 9 16 23	23	"	18 30 54.2	+0.05	
27 13 0 7	7	Berlin	18 5 43.05	+2.21	
1864 február 2 15 13 28	28	Madras	130 44 11.4	+3.68	
9 12 45 41	41	"	129 24 48.9	+1.73	
10 13 0 1	1	"	129 13 43.5	+3.12	
16 14 9 6	6	"	128 11 35.25	+3.61	
április 1 9 59 55	55	Bécs (Josefst.)	126 33 54.9	+1.45	
2 8 26 55	55	"	126 39 19.95	+0.51	
2 9 48 10	10	"	126 39 40.2	+1.36	
3 8 14 9	9	"	126 45 27.0	+0.41	
6 10 5 37	37	Bécs	127 6 14.25	+1.62	
6 12 53 49	49	Berlin	127 7 6.75	+2.28	
10 9 24 55	55	"	127 37 8.85	+1.23	

észl. hely közép ideje	észl. hely	l. egy. emelkedés		látköz	l. elhajlás		látköz
1864 április	13 9 ^h 17 ^m 37 ^s	Berlin	128° 3' 37.45	+1.423	+16° 38'	29.6	+2.13
	13 8 50 13.1)	Leyton	128 3 48.3	+1.00			
	13 11 21 25	"	128 4 50.4	+2.04	+16	38	+2.33
	23 10 41 15	Lipscse ²⁾	129 49 2.85	+1.91	+16	20	+2.19
	³⁾ 24 11 31 2	Berlin	130 0 20.7	+1.49	+16	18	+2.09
	30 11 31 29	Leiden	131 17 12.0	+1.96	+16	4	+2.34
május	3 9 53 55	"	131 56 52.05	+1.66			
	4 10 28 21	"	132 10 51.6	+1.80	+15	53	+2.19
	6 10 24 30	Berlin ⁴⁾	132 38 45.6	+1.81	+15	46	+2.15
	8 10 35 5	"	133 7 55.8	+1.84	+15	40	+2.16
	9 10 14 23	"	133 22 26.25	+1.78	+15	37	+2.12
1865 márcz.	21 12 20 59.5	Bécs	211 37 22.65	-1.05	-13	12	+2.91
	21 14 25 14.2	"	211 36 46.65	+0.15	-13	12	+2.96
	29 12 30 42.5	"	210 31 52.65	-0.64	-12	46	+2.99
	29 14 28 37.8	"	210 31 9.45	+0.57	-12	46	+2.99
április	20 11 44 59.1	"	206 49 15.45	-0.06	-11	16	+2.99
	20 12 45 32.0	"	206 48 45.0	+0.55	-11	15	+2.99
	21 11 37 36.4	"	206 38 44.55	-0.07	-11	11	+2.99
	21 12 23 49.2	"	206 38 26.4	+0.39	-11	11	+2.99

észl. hely közép ideje	észl. hely	l. egy. emelkedés	látköz	l. elhajlás	látköz
1865 április	Bécs	206° 28' 12'' 6	-0'' 06.	-11° 7'	+2'' 98
	"	206 7 41.85	-0.52	-10 58	+2.97
	"	206 7 21.6	-0.03	-10 58	+2.97
	"	205 16 30.9	+0.45	-10 37	+2.96
május	"	202 44 40.65	+0.85	-9 31	+2.75
	"	202 25 47.7	+0.66	-9 22	+2.73
	Berlin	202 25 43.35	+0.45	-9 22	+2.9
	Bécs	202 25 45.0	+0.84	-9 22	+2.72
	"	202 14 16.2	+0.61	-9 17	+2.71
1866 június	Clinton	259 19 17.85	+0.75	-21 4	+2.6
	"	259 8 41.7	+0.15	-21 3	+2.7
	"	258 57 44.55	-0.15	-21 2	+2.7
1867 július	Clinton	308 40 26.7	+0.95	-15 53	+2.61
	"	308 40 28.05	+0.95	-15 53	+2.61
august.	"	307 47 23.25	+0.46	-16 6	+2.66
	"	307 36 45.6	+0.50	-16 9	+2.66
	Washington	307 27 19.8	-0.16	-16 11	54.6
	Berlin	303 50 45.6	+0.6	-17 9	30.2
	"	303 44 34.05	-0.45	-17 11	18.4

észl. hely közép ideje	észl. hely	l. egy. emelkedés	látköz	l. elhajlás	látköz
1868 septemb. 8 12 ^h 32 ^m	0°				
10 10 46	Lund	8° 52'	10."05	+5° 19'	+2."9
11 11 42	"	8 36	4.65	+5 12	+3.0
17 10 58	"	8 27	7.8	+5 8	+3.0
17 12 39	Lipsee	7 31	52.35	+4 53	+2.8
18 12 28	"	7 31	16.8	+4 42	+2.8
18 12 28	"	7 21	33.0	+4 38	+2.8
október 5 9 24	Washington	4 25	36.15	+3 14	+2.29
6 8 16	"	4 15	52.95	+3 9	+2.32
8 10 20	Lund	3 57	18.45	+3 0	+3.1

Megjegyzések : 1) A Leytonban történt észleletek idői a greenwichi délkörre vonatkoznak.

²³ Az Astr. Nachrichten-ban tartalmazott egyenes emelkedés +10°05'-szel nagybővített, az ott használt hibás redukció javítása folytán.

3) A Leytonban április 24-dikén történt észlelet, mely már az észlelőtől is kétégyesnek mondhatjuk, nem a bolygóra vonatkozik, a mint ez az összehasonlítási csillagnak Bécs-beni meghatározásából kiderült. Az ugyanezen napon történt berlini észlelet összehasonlítási csillagát Weiss e 8^m 1065. csillaggal való összehasonlítás által határozottam meg, s e két csillag közt különbséget találtam: 1865. márczius 12-dikén egyenes emelkedésben — 4^m 6^s 38. elhajlásban — 4' 18" 6.

a) A közölt egyenes emelkedés +44.⁸⁵, az elhajlás +0.⁶-szel javítatott, miután az összehasonlítási csallag 1864-diki közép helye rossz volt kiszámítva Mägdele-r-ből.

A látköz rovataiban lévő mennyiségek az észlelt egyenes emelkedések- és elhajlásoknak látköz miatti javításai. Ezen mennyiségeket az első két szembenállás számára a napnak egyenlítői látköri látköze $8^{\circ}9'$ -értékével számítottam ki; az ezekre következő szembenállások idejében pedig azt lehetett feltenni, hogy az észlelőktől adott látközök már nem az $E n c k e$ -féle értéken, hanem a naplátköz ujabbi értékén alapulnak, s így változatlanul tartattak meg. A fény irányferdülésére nézve az észlelési időkből $493^{\circ}.15'$ \triangle (a hol \triangle a bolygónak távolsága a földtől) vonatott le. Végre az ekképen a látköz s irányferdüléstől megszabadított észleletek összehasonlítása a naplókkal a következő: (Observ. — Calc.) — α betű által az egyenes emelkedés, δ által az elhajlás van jelölve:

berlini köz. idő	észl. hely	α (O—C)	δ (O—C)
1862 októb. 24.377	Koppenhága	+12."60	—
24.408	"	+ 8.93	—
24.471	"	+ 2.19	+1."40
30.377	"	+11.35	—
novbr. 1.380	"	+12.24	+6.91
14.477	"	+ 3.64	—5.94
20.438	"	+16.99	—2.01
21.376	"	+14.04	+1.86
27.529	Berlin	+ 6.56	+3.13
1864 febr. 2.438	Madras	+ 4.22	+6.95
9.335	"	+ 6.56	+0.10
10.345	"	+ 7.70	+2.67
16.393	"	+ 6.93	+6.48
április 1.395	Bécs (Josefst.)	— 3.77	+13.48
2.330	"	— 5.91	+9.81
2.387	"	— 5.02	+7.64
3.321	"	— 2.80	+8.73
6.398	Bécs	— 0.82	+6.25
6.523	Berlin	— 1.99	+3.88
10.378	"	—11.72	+6.37
13.373	"	— 5.57	+6.61
13.391	Leyton	— 5.06	—
13.496	"	— 0.11	+8.20

berlini köz. idő	észl. hely	α (O—C)	δ (O—C)
1864 április 23.433	Lipcse	—6."25	+8."14
24.380	Berlin	—10.30	+ 5.38
30.489	Leiden	— 3.25	+11.14
május 3.421	"	+ 5.17	—
4.445	"	— 6.40	+16.59
6.417	Berlin	— 4.80	+10.90
8.424	"	+ 1.13	+18.23
9.410	"	— 0.05	+ 0.54
1865 márcz. 21.578	Bécs	+2' 22."05	43."20
21.491	"	+2 19.35	—47.40
29.580	"	+2 17.60	—47.25
29.498	"	+2 18.60	—48.23
április 20.467	"	+2 18.22	—49.04
20.509	"	+2 15.03	—49.70
21.462	"	+2 17.00	—49.95
21.494	"	+2 19.60	—51.40
22.461	"	+2 15.01	—50.78
24.422	"	+2 11.05	—51.19
24.456	"	+2 12.42	—48.93
május 17.447	"	+ 0.15	—8.74
20.424	"	— 1.05	—3.29
20.431	Berlin	— 2.81	—4.87
20.439	Bécs	+ 1.74	+0.70
22.415	"	— 5.55	—3.36
1866 június 13.778	Clinton	—15.36	—5.16
14.730	"	—11.98	—3.55
15.710	"	—12.00	—4.71
1867 július 30.796	"	+21.68	+7.84
30.796	"	+23.03	+6.54
aug. 4.748	"	+25.74	+6.36
5.745	"	+25.00	+6.28
1868 sept. 8.509	Lund	—17.08	—4.45
10.436	"	—15.07	—3.24
11.475	"	—11.79	—1.62
17.447	Lipcse	—16.95	+1.89
17.517	"	—10.81	+2.59
18.510	"	—14.82	—1.31

berlini köz. idő	észl. hely	α (O—C)	δ (O—C)
1868 októb. 5.630	Washington	—12.34	—8.28
6.583	"	—11.69	—8.71
8.418	Lund	—10.47	—3.20

Elhagyatvák ezen jegyzékben: az 1865. április 29-dikén történt bécsi észlelet, annak aránylagos elszigeteltsége következtében, továbbá az 1867-diki szembenállásban egy washingtoni és két berlini észlelet, miután az 1867-diki normalhelyt képező clintoni észleletek a clintoni csillagda igazgatója — Dr. Peterstől még augusztus hóban küldettek be szivességből a szerzőnek, mire azonnal elemjavításhoz fogtam.

Összefoglalván ezen számcsoportokat középszámokba, nyerjük:

berlini idő	α (O—C)	δ (O—C)
1862 oktob. 27.203	+9."46	—
" 28.425		+4."15
nov. 20.955	+10.31	— 0.74
1864 febr. 9.628	+ 6.35	+ 4.05
április 7.299	— 4.28	
" 6.622		+ 7.89
május 2.552	— 3.09	
2.428		+10.13
1865 márcz. 25.537	+2' 19."40	—46.52
április 22.182	+2 15.48	—50.14
május 20.231	— 1.50	— 3.91
1866 junius 14.739	—13.11	— 4.47
1867 august. 2.521	+23.86	+ 6.76
1868 sept. 21.614	—13.45	— 2.93

A kettős időadat kikerülése végett az első, negyedik és ötödik csoport középszámaiban — tekintetbe véve a naplójavítások menetét — ezt is írhatjuk:

oktob. 28.425	α (O—c) középsz.	=+9."50
április 7.299	δ (O—c) "	=+ 7.97
május 2.552	δ (O—c) "	=+10.14.

Továbbá közbeiktatván a naplókat az időközépszámok részére naplőhelyekül erednek:

idő			egy. emelk.			elhajlás	
1862 okt.	28.425	21° 46'	8."42	+	9° 27'	32."06	
nov.	20.955	18 32	49.44	+	7 54	46.48	
1864 febr.	9.628	129 21	20.23	+	15 24	11.42	
április	7.299	127 12	54.29	+	16 45	6.50	
május	2.552	131 44	55.47	+	15 58	16.39	
1865 márcz.	25.537	211 3	37.47	—	12 59	19.94	
április	22.182	206 28	52.95	—	11 7	42.10	
május	20.231	202 26	59.04	—	9 22	52.00	
1866 junius	14.739	259 8	47.67	—	21 3	33.13	
1867 aug.	2.521	308 10	47.67	—	16 0	46.28	
1868 septbr	21.614	6 50	52.33	+	4 23	52.11	

s hozzáadva ezekhez a naplóktóli eltérések fennebbi közép-számaait — a következő látszólagos éjegyenre vonatkozta-tott normalhelyek erednek:

Sz.	berlini idő		α app.		δ app.	észl.sz
I. 1862 okt.	28.425	21° 46' 17."92	+	9° 27' 36."21	5.2	
II. nov.	20.955	18 32 59.75	+	7 54 45.74	4	
III. 1864 febr.	9.628	129 21 36.58	+	15 24 15.47	4	
IV. április	7.299	127 12 50.01	+	16 45 14.47	10.9	
V. május	2.552	131 44 52.38	+	15 58 26.53	8.7	
VI. 1865 márcz.	25.537	211 5 56.87	—	13 0 6.46	4	
VII. ápril.	22.182	206 31 8.43	—	11 8 32.24	7	
VIII. május	20.231	202 26 57.54	—	9 22 55.91	5	
IX. 1866 jun.	14.739	259 8 34.56	—	21 3 37.60	3	
X. 1867 aug.	2.521	308 11 11.53	—	16 0 39.52	4	
XI. 1868 sept.	21.614	6 50 38.88	+	4 23 49.18	9	

Számításaink folyamatában az elemrendszereket s nem különben a háborok értékeit, hol az 1860-ki, hol az 1870-ki közép éjegyenre vonatkoztatjuk, szükség tehát normalhe-lyeinket is átvinni a megnevezett éjegyenekre. Erre a követ-kező mennyiségek szolgálnak:

normal hely. — präcessio 1860.0 óta — nutatio

Sz.	α -ban	δ -ban
I.	—2' 28."56	—0' 57."82
II.	—2 30.57	—1 0.15
III.	—3 41.26	+1 0.22
IV.	—3 49.08	+0 59.10

Sz.	α -ban		δ -ban	
V.	—3'	49."22	+1'	5."47
VI.	—4	23.72	+1	29.27
VII.	—4	22.65	+1	34.64
VIII.	—4	23.13	+1	39.38
IX.	—5	49.42	+0	14.99
+ präcessio 1860.0-tól 1870.0-ig				
VI.	+8'	4."55	—2'	51."72
VII.	+7	58.27	—2	59.44
VIII.	+7	53.28	—3	5.35
IX.	+8	56.48	—0	37.85
+ präcessio 1870.0-ig — nutatio				
X.	+2'	6."86	+0'	23."55
XI.	+1	8.04	+0	30.33

miknek hozzáadásával normalhelyeink átmennek a következő közép normalhelyekbe:

Sz.	berlini idő			α			δ		
1860.0 közép éjegyben:									
I.	1862 okt.	28.425	21°	43'	49."36	+	9°	26'	38."39
II.	nov.	20.955	18	30	29.18	+	7	53	45.59
III.	1864 febr.	9.628	129	17	55.32	+	15	25	15.69
IV.	április	7.299	127	9	0.93	+	16	46	13.57
V.	május	2.552	131	41	3.16	+	15	59	32.00
VI.	1865 márcz.	25.537	211	1	33.15	—	12	58	37.19
VII.	április	22.182	206	26	45.78	—	11	6	57.60
VIII.	május	20.231	202	22	34.41	—	9	21	16.53
IX.	1866 junius	14.739	259	2	45.14	—	21	3	22.61
1870.0 közép éjegyben:									
VI.	1865 márcz.	25.537	211°	9'	37."70	—	13	1'	28."91
VII.	április	22.182	206	34	44.05	—	11	9	57.04
VIII.	május	20.231	202	30	27.69	—	9	24	21.88
IX.	1866 junius	14.739	259	11	41.62	—	21	4	0.46
X.	1867 aug.	2.521	308	13	18.39	—	16	0	15.97
XI.	1868 sept.	21.614	6	51	46.92	+	4	24	19.51

A háborok kiszámítása.

Freia bolygó különleges (specialis) háborainak számítását Encke módszerével vittük ki, mely szerint a háborok

derékszögű összrendezőkben kifejezve találatnak. Számításunk két részre oszlik; ezeknek közelített szorosságu elseje (A) az észleletek kezdetétől 1867-ig terjed, míg másika (B), mely a Jupiter és Saturn által okozott háborokat szorosán meghatározza, az 1862-től egész 1872-ig tartó időszakot foglalja magában. Alapsikul kezdettől végig a nappálya vétetett $+X$ tengely a tavaszpontra, $+Y$ tengely 90° -nyi hosszúságra, $+Z$ tengely a nappálya éjszaki sarka felé lévén irányozva. A háborító bolygók összrendezőit, valamint azoknak a napra ható erőit ama segédtablákból vettük, melyek részint a német csillagászati társulat közlönyeinek első füzetében (Hülftstafeln zur Berechnung specieller Störungen 1830—1864) részint a berlini évkönyvekben tartalmazvák, (A) 1865—1867 és (B) 1871—72 részére a nevezett mennyiségek a berlini évkönyv adataiból számittattak ki.

A háborok (A) értékei.

Ezen első számítás az 1) elemeken alapul; érintési pontul az 1863. július 27.0 időpont választatott; ez körülbelül amaz időszaknak esik közepére, mely az 1) elemrendszert meghatározó észleleteket foglalja be. Ezen viszonyoknak megfelelőleg akként egyszerűsítettük a számítást, hogy azon képletekben, melyek szerint a számítás történik, Freia bolygó 1) elemeiből számított összrendezőit helyettesítettük háborított (v. valódi) összrendezői helyébe.

4 háborításai

1860.0 közép éjegyén

(7. tizedes egységében)

berlini idő 0. ^h	ξ	η	ζ
1862 sept. 20	+2603	+755	--51
oktob. 10	+2230	+638	--44
30	+1897	+532	--38
nov. 19	+1599	+437	--32
decz. 9	+1333	+353	--27
29	+1098	+281	--22
1863 jan. 18	+ 889	+219	--17
febr. 7	+ 706	+167	--13
27	+ 546	+124	--10

berlini idő 0. ^b	ξ	η	ζ
1863 márcz. 19	+ 408	+ 89	— 7
ápril 8	+ 291	+ 61	— 5
28	+ 195	+ 40	— 3
május 18	+ 117	+ 23	— 2
junius 7	+ 60	+ 12	— 1
27	+ 21	+ 4	0
julius 17	+ 2	+ 0	0
august. 6	+ 2	+ 0	0
26	+ 21	+ 4	0
sept. 15	+ 59	+ 11	— 1
oktob. 5	+ 115	+ 21	— 1
25	+ 188	+ 34	— 2
nov. 14	+ 279	+ 48	— 3
decz. 4	+ 387	+ 64	— 3
24	+ 513	+ 79	— 4
1864 január 13	+ 655	+ 93	— 4
febr. 2	+ 815	+ 102	— 4
22	+ 994	+ 107	— 4
márcz. 13	+ 1193	+ 104	— 3
ápril. 2	+ 1414	+ 91	— 1
22	+ 1660	+ 67	+ 2
május 12	+ 1933	+ 32	+ 5
junius 1	+ 2237	— 21	+ 10
21	+ 2576	— 87	+ 16
julius 11	+ 2954	— 168	+ 23
31	+ 3375	— 264	+ 32
august. 20	+ 3843	— 375	+ 43
sept. 9	+ 4363	— 499	+ 54
29	+ 4939	— 635	+ 68
október 19	+ 5576	— 779	+ 83
nov. 8	+ 6277	— 931	+ 99
28	+ 7047	— 1086	+ 117
decz. 18	+ 7888	— 1241	+ 137
1865 január 7	+ 8805	— 1392	+ 157
27	+ 9800	— 1534	+ 179
febr. 16	+ 10875	— 1664	+ 202

berlini idő 0. ^h	ξ	η	ζ
1865 márcz. 8	+12033	— 1777	+ 225
28	+13275	— 1868	+ 250
április 17	+14602	— 1931	+ 274
május 7	+16016	— 1962	+ 298
27	+17516	— 1956	+ 322
junius 16	+19103	— 1908	+ 346
julius 6	+20776	— 1812	+ 369
26	+22535	— 1665	+ 390
august. 15	+24378	— 1460	+ 410
sept. 4	+26304	— 1193	+ 428
24	+28311	— 860	+ 443
oktob. 14	+30397	— 455	+ 455
nov. 3	+32558	+ 24	+ 464
23	+34793	+ 583	+ 469
decz. 13	+37097	+ 1223	+ 470
1866 január 2	+39468	+ 1951	+ 466
22	+41901	+ 2768	+ 457
febr. 11	+44393	+ 3676	+ 442
márcz. 3	+46938	+ 4680	+ 421
23	+49532	+ 5779	+ 392
április 12	+52171	+ 6977	+ 358
május 2	+54849	+ 8273	+ 313
22	+57561	+ 9669	+ 261
junius 11	+60301	+11164	+ 199
julius 1	+63065	+12758	+ 128
21	+65847	+14450	+ 47
august. 10	+68641	+16236	— 44
30	+71442	+18116	— 147
sept. 19	+74243	+20082	— 261
oktob. 9	+77042	+22132	— 387
29	+79832	+24260	— 526
nov. 18	+82610	+26458	— 678
decz. 8	+85372	+28719	— 843
28	+88114	+31034	—1022
1867 január 17	+90833	+33394	—1214
febr. 6	+93529	+35788	—1421

berlini idő 0. ^h	ξ	η	ζ
1867 febr. 26	+ 96200	+38203	—1643
márcz. 18	+ 98848	+40626	—1879
április 7	+101474	+43042	—2129
27	+104082	+45434	—2394
május 17	+106680	+47785	—2673
junius 6	+109274	+50076	—2967
26	+111876	+52287	—3275
julius 16	+114500	+54395	—3596
august. 5	+117163	+56379	—3930
25	+119886	+58214	—4277
sept. 14	+122696	+59875	—4636
oktob. 4	+125621	+61338	—5004
24	+128698	+62574	—5385
nov. 13	+131969	+63558	—5773

A háborok (B) értékei:

Ezen szoros számítás szintén az 1863. július 27.0 érintési pontból indul ki, s a mind Jupiter mind Saturn által gyakorolt háborokat tartalmazza. Éjegyenként 1864 végeig az 1860.0 közép éjegyben, azontúl pedig az 1870.0 közép éjegyben fogadtatott el. Freia bolygó (kerületi) összerendezői kezdettől fogva 2') elemrendszer szerint, 1868-diki november 7-dikétől pedig 3') szerint számítottak.

4 + 5 háborításai

(7. tizedes egységében)

berlini 0. ^h	ξ	η	ζ
1860.0 közép éjegyben:			
1862 sept. 20	+2731	+700	—56
oktob. 10	+2339	+587	—48
30	+1989	+486	—48
nov. 19	+1676	+395	—35
decz. 9	+1398	+316	—29
29	+1151	+249	—23
1863 január 18	+ 932	+192	—18
febr. 7	+ 740	+145	—14
27	+ 572	+106	—11

berlini 0. ^a	ξ	η	ζ
1863 márcz. 19	+ 427	+ 75	— 8
április 8	+ 305	+ 51	— 5
28	+ 203	+ 33	— 3
május 18	+ 123	+ 19	— 2
junius 7	+ 62	+ 9	— 1
27	+ 22	+ 3	0
julius 17	+ 2	0	0
august. 6	+ 2	0	0
26	+ 22	+ 3	0
septbr. 15	+ 61	+ 8	— 1
oktob. 5	+ 119	+ 16	— 1
25	+ 194	+ 25	— 2
novbr. 14	+ 288	+ 35	— 3
decz. 4	+ 399	+ 45	— 3
24	+ 527	+ 53	— 3
1864 január 13	+ 673	+ 57	— 4
február 2	+ 836	+ 57	— 3
22	+ 1019	+ 49	— 2
márcz. 13	+ 1221	+ 32	— 1
április 2	+ 1445	+ 3	+ 2
22	+ 1694	— 39	+ 6
május 12	+ 1970	— 95	+ 10
junius 1	+ 2277	— 168	+ 17
21	+ 2618	— 257	+ 24
julius 11	+ 2998	— 364	+ 33
31	+ 3419	— 487	+ 44
aug. 20	+ 3887	— 627	+ 57
septbr. 9	+ 4405	— 781	+ 72
29	+ 4977	— 949	+ 88
októb. 19	+ 5608	— 1127	+ 106
nov. 8	+ 6300	— 1313	+ 126
28	+ 7057	— 1503	+ 148

1870.0 közép éjegyén:

decz. 18	+ 7886	— 1676	+ 172
1865 január 7	+ 8782	— 1863	+ 197
27	+ 9752	— 2042	+ 223

berlini 0 ^b	ξ	η	ζ
1865 febr. 16	+10795	— 2211	+ 251
márcz. 8	+11915	— 2363	+ 280
28	+13113	— 2495	+ 309
április 17	+14388	— 2602	+ 340
május 7	+15742	— 2679	+ 370
27	+17174	— 2721	+ 401
junius 16	+18684	— 2724	+ 431
julius 6	+20271	— 2683	+ 460
26	+21934	— 2594	+ 489
aug. 15	+23672	— 2452	+ 516
sept. 4	+25483	— 2253	+ 541
24	+27366	— 1994	+ 564
oktob. 14	+29317	— 1670	+ 584
nov. 3	+31335	— 1277	+ 602
23	+33417	— 814	+ 615
decz. 13	+35559	— 276	+ 624
1866 jan. 2	+37760	+ 339	+ 629
22	+40015	+ 1033	+ 628
febr. 11	+42321	+ 1809	+ 622
márcz. 3	+44674	+ 2668	+ 609
23	+47071	+ 3611	+ 590
április 12	+49507	+ 4640	+ 564
május 2	+51978	+ 5754	+ 529
22	+54481	+ 6953	+ 487
junius 11	+57011	+ 8238	+ 435
julius 1	+59563	+ 9606	+ 374
21	+62133	+11055	+ 303
aug. 10	+64718	+12584	+ 221
30	+67313	+14189	+ 128
septbr. 19	+69915	+15865	+ 24
okt. 9	+72519	+17609	— 92
29	+75123	+19414	— 220
nov. 18	+77623	+21275	— 361
decz. 8	+80318	+23183	— 516
28	+82906	+25130	— 684
1867 január 17	+85486	+27106	— 865
febr. 6	+88058	+29102	—1061

berlini 0 ^b	ξ	η	ζ
1867 febr. 26	+ 90623	+31105	— 1271
márcz. 18	+ 93184	+33102	— 1495
ápril. 7	+ 95745	+35080	— 1734
27	+ 98213	+37022	— 1987
máj. 17	+100894	+38913	— 2255
jun. 6	+103499	+40735	— 2536
26	+106141	+42468	— 2832
julius 16	+108835	+44093	— 3142
aug. 5	+111602	+45588	— 3465
25	+114464	+46932	— 3800
sept. 14	+117449	+48102	— 4148
okt. 4	+120588	+49073	— 4507
24	+123919	+49823	— 4876
nov. 13	+127487	+50327	— 5254
decz. 3	+131340	+50562	— 5641
23	+135535	+50505	— 6033
1868 jan. 12	+140139	+50135	— 6431
febr. 1	+145223	+49432	— 6831
21	+150871	+48381	— 7232
márcz. 12	+157175	+46970	— 7630
ápril. 1	+164236	+45193	— 8024
21	+172168	+43049	— 8410
máj. 11	+181094	+40548	— 8786
31	+191147	+37711	— 9146
jun. 20	+202472	+34570	— 9487
jul. 10	+215221	+31175	— 9805
30	+229557	+27596	—10095
aug. 19	+245648	+23923	—10351
sept. 8	+263664	+20276	—10570
28	+283780	+16805	—10747
okt. 18	+306164	+13694	—10877
nov. 7	+330977	+11168	—10957
27	+358365	+ 9495	—10985
decz. 17	+388453	+ 8988	—10960
1869 jan. 6	+421336	+10007	—10883
26	+457068	+12962	—10759
febr. 15	+495654	+18305	—10593

berlini 0 ^h	ξ	η	ζ
1869 márcz. 7	+ 537039	+ 26531	—10393
27	+ 581093	+ 38170	—10170
ápril. 16	+ 627607	+ 53774	— 9941
máj. 6	+ 676273	+ 73909	— 9720
26	+ 726685	+ 99129	— 9529
jun. 15	+ 778327	+ 129968	— 9388
jul. 5	+ 830579	+ 166906	— 9322
25	+ 882712	+ 210354	— 9353
aug. 14	+ 933904	+ 260627	— 9506
sept. 3	+ 983248	+ 317923	— 9804
23	+1029780	+ 382301	—10266
okt. 13	+1072495	+ 453663	—10912
nov. 2	+1110383	+ 531746	—11756
22	+1142452	+ 616122	—12806
decz. 12	+1167787	+ 706196	—14067
1870. jan. 1	+1185542	+ 801218	—15539
21	+1194985	+ 900295	—17213
febr. 10	+1195553	+1002446	—19079
márcz. 2	+1186815	+1106584	—21118
22	+1168515	+1211580	—23310
ápril. 11	+1140572	+1316285	—25630
május 1	+1103073	+1419564	—28048
21	+1056261	+1520320	—30536
jun. 10	+1000528	+1617527	—33063
30	+ 936385	+1710240	—35599
jul. 20	+ 864454	+1797621	—38114
aug. 9	+ 785435	+1878938	—40579
29	+ 700089	+1953581	—42968
sept. 18	+ 609219	+2021055	—45258
okt. 8	+ 513645	+2080982	—47428
28	+ 414191	+2133095	—49458
nov. 17	+ 311667	+2177230	—51334
decz. 7	+ 206863	+2213315	—53042
27	+ 100531	+2241362	—54574
1871 jan. 16	— 6613	+2261462	—55921
febr. 5	— 113905	+2273763	—57079
25	— 220727	+2278468	—58045

berlini 0 ^h	ξ	η	ζ
1871márcz.17	— 326512	+2275825	—58818
ápril. 6	— 430747	+2266119	—59399
26	— 532970	+2249660	—59791
máj. 16	— 632766	+2226779	—59997
jun. 5	— 729772	+2197823	—60023
25	— 823669	+2163148	—59873
julius15	— 914179	+2123113	—59555
aug. 4	—1001068	+2078079	—59075
24	—1084135	+2028403	—58442
sept.13	—1163214	+1974439	—57662
okt. 3	—1238171	+1916532	—56744
23	—1308899	+1855019	—55697
nov. 12	—1375319	+1790224	—54528
decz. 2	—1437372	+1722461	—53245
22	—1495021	+1652035	—51858
1872jan. 11	—1548247	+1579233	—50374
31	—1597048	+1504332	—48801
febr. 20	—1641435	+1427595	—47146
márcz.11	—1681434	+1349274	—45417
31	—1717079	+1269605	—43622

A nappályára vonatkozó derékszögű összrendezők egyik éjegyentől a másikra való átvitelére a következő képletek szolgálnak:

$$x'' = x' - 0.00000297x' - 0.00243567y' - 0.00000288z'$$

$$y'' = y' + 0.00243567x' - 0.00000297y' - 0.00002349z'$$

$$z'' = z' + 0.00000294x' + 0.00002349y'$$

melyekben $x'' y'' z''$ összrendezők az 1870.0 diki s $x' y' z'$ összrendezők az 1860.0-diki közép éjegyekre vonatkoznak. Ezen képletek a német csillagászati társulat fent idézett közlönyében tartalmazottakhoz csatlakoznak, s már az összrendezők s a háborok átváltoztatásánál jöttek alkalmazásra.

Kiszámítottuk továbbá a naplók időtartamai számára a derékszögű összrendezőkben kifejezett háboroknak a földközépi helyre való befolyását, még pedig az 1862 és 1864. évre ezen különbzéki képletek szerint:

$$dz = \frac{-\sin \alpha}{\Delta \cos \delta} \xi_0 + \frac{\cos \alpha}{\Delta \cos \delta} \eta_0$$

$$d\delta = \frac{-\cos \alpha \sin \delta}{\Delta} \xi_0 - \frac{\sin \alpha \sin \delta}{\Delta} \eta_0 + \frac{\cos \delta}{\Delta} \zeta_0$$

a hol ξ_0 , η_0 , ζ_0 az egyenlítőre vonatkoztatott háborokat (Δ a földtéli távolságot) jelölik s ezen képletek segítségével:

$$\xi_0 = \xi$$

$$\eta_0 = \eta \cos \epsilon - \zeta \sin \epsilon$$

$$\zeta_0 = \eta \sin \epsilon + \zeta \cos \epsilon$$

(hol „e“ a nappálya ferdesége) számíttatnak ki ξ , η , ζ értékeiből; a következő évekre nézve pedig úgy jártunk el, hogy a napló (α , δ) helyéből, mely ξ_0 , η_0 , ζ_0 mennyiségeket tartalmazza, az ezen mennyiségek elhagyásával számított földközépi helyet (α_0 , δ_0) levontuk. A következő számtár ezen különbségeket bezárólag 1866-ig (A) háborok értékei szerint adja, innen kezdve pedig (B) háborok szerint:

idő	$\alpha - \alpha_0$	$\delta - \delta_0$
1862 október 24	-2."77	-1."64
novemb. 1	- 2.15	- 1.33
9	- 1.62	- 1.07
17	- 1.23	- 0.85
25	- 0.99	- 0.70
1864 február 2	-7."80	+1."72
10	- 8.47	+ 1.81
18	- 9.09	+ 1.89
26	- 9.58	+ 1.95
márcz. 5	-10.00	+ 2.01
13	-10.36	+ 2.08
21	-10.51	+ 2.12
29	-10.63	+ 2.20
április 6	-10.68	+ 2.25
14	-10.65	+ 2.30
22	-10.59	+ 2.40
30	-10.43	+ 2.47
május 8	-10.26	+ 2.53
1865 márczius 20	+1' 5."85	-21."64
28	+1 7.82	-22.50

idő		$\alpha - \alpha_0$	$\delta - \delta_0$
1865 április	5	+ 1'	8."92
	13	+ 1	9.18
	21	+ 1	8.64
	29	+ 1	7.45
május	7	+ 1	5.91
	15	+ 1	4.22
	23	+ 1	2.47
	31	+ 1	0.92
1866 május	26	+ 6'	54."37
junius	3	+ 7	1.90
	11	+ 7	6.16
	19	+ 7	7.11
	27	+ 7	5.13
julius	5	+ 7	0.73
	13	+ 6	54.61
1867 julius	23	+13'	48."55
	31	+14	10.30
august.	8	+14	26.18
	16	+14	35.67
	24	+14	38.80
septbr.	1	+14	35.93
1868 septbr.	8	— 2'	45."09
	16	— 2	20.32
	24	— 1	44.07
október	2	— 0	59.80
	10	— 0	12.07

Ha most a derékszögű (B) és (A) háborok közti különbségeket [(A) 1865—66-diki értékeket átvívén az 1870.0-diki éjegyenre] átváltoztatjuk az egyenlítőre s a fentebbi $d\alpha$ és $d\delta$ mennyiségeket kifejező képletekbe helyettesítjük, akkor a következő értékeket nyerjük kifejezve a földközépi α és δ összehrendezőkben

(B) — (A)		
idő	α -ban	δ -ban
1862 október 30	— 0."73	— 0."33
novemb. 19	— 0.58	— 0.27

idő	α -ban	δ -ban
1864 február 2	+ 0."13	— 0."05
22	+ 0.14	— 0.04
márczius 13	+ 0.16	— 0.05
április 2	+ 0.22	— 0.05
22	+ 0.30	— 0.06
május 12	+ 0.40	— 0.10
1865. márczius 28	+ 3."76	— 0."80
április 17	+ 4.11	— 0.94
május 7	+ 4.34	— 1.06
27	+ 4.37	— 1.19
1866 június 11	— 20."00	+ 2."07
július 1	— 19.06	+ 2.41

A normálhelyek összehasonlításánál felhasználandó ξ_0 η_0 ζ_0 mennyiségek a (B) háborok számtárából közbeiktatás s az egyenlitőre való átváltoztatás által következőleg folynak:

Sz.	berlini idő	ξ_0	η_0	ζ_0
1860.0 közép éjegyén				
I. 1862 oktob.	28.425	+ 2015	+ 470	+ 158
II. novb.	20.955	+ 1648	+ 368	+ 123
III. 1864 febr.	9.628	+ 904	+ 52	+ 19
IV. ápril.	7.299	+ 1508	— 8	0
V. május	2.552	+ 1836	— 64	— 19
1870.0 közép éjegyén				
VI. 1865. márcz.	25.537	+ 12960	— 2396	— 707
VII. ápril.	22.182	+ 14731	— 2546	— 726
VIII. május	20.231	+ 16680	— 2642	— 720
IX. 1866 június	14.739	+ 57486	+ 7617	+ 3768
X. 1867 aug.	3.521	+ 111253	+ 43021	+ 14933
XI. 1868 sept.	21.614	+ 277118	+ 20665	— 2692

Hogy 3') elemrendszert egy későbbi s pedig 1872. jan. 1.0 érintési pontra átvigyük, az ezen elemrendszer szerinti kerüléki összrendezőket:

$$x = k \sin (E + K) + \alpha$$

$$y = l \sin (E + L) + \lambda$$

$$z = m \sin (E + M) + \mu$$



az utolsó cikkben adott nappályai constansok segélyével a nevezett időpont részére számítottuk ki. Azután a kerületi mozgásbani sebességek közvetlenül folynak t szerinti különb-
zékelés által az itteni képletekből, s pedig következőleg:

$$\frac{dx}{dt} = k. \cos (E + K) \cdot \frac{dE}{dt}$$

$$\frac{dy}{dt} = l. \cos (E + L) \cdot \frac{dE}{dt}$$

$$\frac{dz}{dt} = m. \cos (E + M) \cdot \frac{dE}{dt}$$

$\frac{dE}{dt}$ különbzéki hányadost pedig ezen egyenlet:

$$M_0 + \mu t = E - \sin \varphi \sin E$$

adja:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\mu}{1 - \sin \varphi \cdot \cos E}.$$

Továbbá a háborok számtára 1872. január 1-jére ξ η ζ s nem különben $\frac{d\xi}{dt}$, $\frac{d\eta}{dt}$, $\frac{d\zeta}{dt}$ értékeit adja; hozzáadván eze-
ket a kerületi összrendezők és sebességekhez, a háborított
(vagyis valódi) összrendezőket és sebességeket nyerjük.

A számbeli műtét a következő:

$x = -2.3567834$	$y = -2.9820558$	$z = +0.0427889$
$\xi = -0.1522187$	$\eta = +0.1615914$	$\zeta = -0.0051128$
$x + \xi = -2.5090021$	$y + \eta = -2.8204638$	$z + \zeta = +0.0376761$
$\frac{dx}{dt} = +0.005680686$	$\frac{dy}{dt} = -0.005999223$	$\frac{dz}{dt} = +0.000288075$
$\frac{d\xi}{dt} = -0.000266130$	$\frac{d\eta}{dt} = -0.000364068$	$\frac{d\zeta}{dt} = +0.000007421$
$\frac{d(x+\xi)}{dt} = +0.005414556$	$\frac{d(y+\eta)}{dt} = -0.006363291$	$\frac{d(z+\zeta)}{dt} = +0.000295496$

Ezen mennyiségekből, melyek egyszersmind a pályá-
constansok egy rendszerének tekinthetők, M , π , Ω , ele-
mekrei átváltoztatás által 1872. január 1.0-időpontban érint-
kező 3') elemeket nyerjük, s összehasonlítván ezeknek a kö-
vetkező cikk végén közölt értékeit 1863. július 27.0-idő-
pontban érintkező 3') elemekkel: következő különbségek
mutatkoznak, mint Jupiter és Saturn által gyakorolt s 1863.

julius 27—1872. január 1-időközön át megnőtt háboroknak
elemekbeni kifejezése :

$$\triangle M 1872. \text{jan. } 1.0 = -2^{\circ} 7' 21.''22$$

$$\triangle \pi = -0 \ 43 \quad 0.32$$

$$\triangle \Omega = -1 \ 1 \quad 44.99$$

$$\triangle i = + \ 1 \quad 2.17$$

$$\triangle \varphi = - \ 43 \quad 37.18$$

$$\triangle \log a = + 0.0023822$$

$$\triangle \mu = -4.''66300.$$

Az elemek átvitelének szoros ellenőrzésére, mi végett a
bolygónak valódi napközepi összrendezőit különböző idők
részére mindkét elemrendszer- s a hozzá tartozó háborokkal
számítjuk, s egymással összehasonlítjuk : az 1872. január 1.0
időpontban érintkező elemrendszerrel a háborítási számítást
újra megkezdtük, s néhány hónapon át következőleg foly-
tattuk :

		ξ	η	ζ
1872 január	11	+ 2	- 2	0
	31	+ 22	- 21	0
február	20	+ 62	- 59	-1
márcz.	11	+123	-115	-2
	31	+204	-189	-3.

Az elemek javítása.

Tegyük fel, hogy

$$t, t', t'', \dots$$

idők számára észlelés által a bolygónak

$$l, l', l'', \dots$$

összrendezői határozottattak meg ; legyen továbbá a bolygónak

$$e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6$$

megközelítőleg szoros elemrendszere ismeretes, s az ezen
elemrendszerrel a nevezett t, t', t'', \dots időkre számított
földközepi összrendezőik (ugyanazok t i., melyek fent ész-
lelteknek vétettek), legyenek :

$$l_0, l'_0, l''_0, \dots$$

— akkor az elemeknek

$$de_1, de_2, de_3, de_4, de_5, de_6$$

javításai meghatározására az észleletek a következő feltételei egyenleteket szolgáltatják:

$$(1) \dots \begin{cases} 0 = -l + l_0 + \frac{dl_0}{de_1} \cdot de_1 + \frac{dl_0}{de_2} \cdot de_2 + \dots + \frac{dl_0}{de_n} \cdot de_n \\ 0 = -l' + l'_0 + \frac{dl'_0}{de_1} \cdot de_1 + \frac{dl'_0}{de_2} \cdot de_2 + \dots + \frac{dl'_0}{de_n} \cdot de_n \\ 0 = -l'' + l''_0 + \frac{dl''_0}{de_1} \cdot de_1 + \frac{dl''_0}{de_2} \cdot de_2 + \dots + \frac{dl''_0}{de_n} \cdot de_n \\ \dots \dots \dots \end{cases}$$

mely egyenleteknek száma az észlelt összrendezők számával egyenlő.

A feltételei egyenletek ilyes rendszerének számbeli felállítására s a legkisebb négyzetek módszere szerinti megoldása a hat ismeretlen s az egyenletek feltélesen nagy száma miatt bár épen nem nehéz, mégsem csekély munka. Hogy ha tehát nem feladatunk, egy lehetőleg szoros eredményt leszármaztatni, vagy ha az észleleti anyag még nem eléggé tökéletes, úgy hogy annak tökéletesbitéséig a szoros eredmény leszármaztatását későbbi időre bizzuk, akkor a munkát rövidítendő a teljes szigorú kiegyenlítési számítás helyett inkább egy kevésbé szigorú, de kevesebb időt igénylő számítási módot használunk fel. Az észlelési s számítási tudomány főnálló alapelvei szerint azonban még egy nem teljesen szoros eredményt is az úton törekedünk leszármaztatni, hogy nagyobb számú észleleteket foglalunk a számításba, mint tulajdonkép elkerülhetlen szükség volna, s hogy itt is a valószínűség-tan szabályai szerint járunk el. Hogy a számítást rövidítsük, könnyen azon gondolatra juthatnánk, miszerint az ismeretlenek számát, mely a szigorú számításnál a javítandó elemek számával egyenlő, leszállítsuk az által, hogy fentebbi „de” javítások néhányát semmivel tegyük egyenlőnek; de ezen eljárás szemügyre vett esetünkben épen nem engedhető meg. Jóllehet egy igen szoros kiindulási elemrendszer birtokában megítélhetjük talán, hogy némely elem csak igen kevésbé fogna még változni, s hogy az elemek változásai milyen változásokat fognának előidézni a földközépi helyek előállításában: mégis a mi esetünkben, csak kevésbé szoros

kiindulási elemrendszer birtokában azt kell feltennünk, hogy a meglevő elemek bármelyike nem csekély, de még jelentékeny változásra képes, s továbbá olyan vizsgálatokat, melyek az elemváltozásoknak befolyását a földközepi helyekre illetik, nem tehetünk fel, s annál kevésbé intézhetünk el, miután azok ama hosszadalmas számításoknak egy része, melyeket épen kikerülni akarunk.

Ebből azon feladatunk származik, hogy az e_1, e_2, \dots, e_6 constansokat, melyek alatt a pályának közönségesen $M, \pi, \Omega, i, \varphi, \mu$ betűkkel jelölt elemeit értjük, olyanokkal helyettesítsük, miszerint ezek némelyeinek javításait semmivel egyenlőknek teheszük; a mi akkor fog történni, ha előreláthatólag az új constansok egy része igen kevésbé ütven el a valóságtól, csak csekély változásokat tükröz, s ha ezeknek elhanyagolása egyszersmind csak kevés befolyással fog birni a javított új constansokból számított l_0, l'_0, l''_0 földközepi összehangozásokra.

Hogy e_1, \dots, e_6 rendszer más pályaconstansok általi helyettesítése határozottan essék szemünkbe, ez utóbbiakat különös betűkkel, még pedig:

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6$$

jelöljük. Ha tehát most ezen új constansokat e képletek:

$$de_1 = \frac{de_1}{d\lambda_1} \cdot d\lambda_1 + \frac{de_1}{d\lambda_2} \cdot d\lambda_2 + \dots + \frac{de_1}{d\lambda_6} \cdot d\lambda_6$$

$$de_2 = \frac{de_2}{d\lambda_1} \cdot d\lambda_1 + \frac{de_2}{d\lambda_2} \cdot d\lambda_2 + \dots + \frac{de_2}{d\lambda_6} \cdot d\lambda_6$$

...

$$de_6 = \frac{de_6}{d\lambda_1} \cdot d\lambda_1 + \frac{de_6}{d\lambda_2} \cdot d\lambda_2 + \dots + \frac{de_6}{d\lambda_6} \cdot d\lambda_6$$

segélyével behozzuk (1) egyenleteinkbe, akkor ezek a következőkbe mennek át:

$$(2) \dots \begin{cases} 0 = -1 + l_0 + \frac{dl_0}{d\lambda_1} \cdot d\lambda_1 + \frac{dl_0}{d\lambda_2} \cdot d\lambda_2 + \dots + \frac{dl_0}{d\lambda_6} \cdot d\lambda_6 \\ 0 = -1' + l'_0 + \frac{dl'_0}{d\lambda_1} \cdot d\lambda_1 + \frac{dl'_0}{d\lambda_2} \cdot d\lambda_2 + \dots + \frac{dl'_0}{d\lambda_6} \cdot d\lambda_6 \\ 0 = -1'' + l''_0 + \frac{dl''_0}{d\lambda_1} \cdot d\lambda_1 + \frac{dl''_0}{d\lambda_2} \cdot d\lambda_2 + \dots + \frac{dl''_0}{d\lambda_6} \cdot d\lambda_6 \\ \dots \end{cases}$$

Továbbá ezen utóbbi egyenletek felette bő értelmét akként szorítjuk meg, hogy azokat ama feladatnak állítjuk kifejezéseül, mely szerint bármely hat földközepi összrendező akként változzék, hogy az által a bolygó látszólagos pályája lehetőleg szorosan illeszkedjék az észleletek összességéhez. Mi a $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_6$ mennyiségeknek ez által történt megszorítására ama kívánatunkból vezettetünk, mely szerint ezeknek némelyei csak igen csekély mérvben tétethessenek fel hibásoknak; a mely feltételt ugyanis csak észlelt, azaz szorosan észlelt mennyiségekről s tehát egyáltalában csak földközepi összrendezőkről állithatunk egyelőre.

$\lambda_1, \dots \lambda_6$ constansok egy része tehát előfordulván az észlelt l, l', l'', \dots összrendezők között, felteszszük egy pillanatra mint általános esetet, hogy valamennyi λ mennyiség észlelt legyen: bármely nem észlelt mennyiség ugyanis oly észleletnek tekinthető, melynek súlya $= 0$; kiszemelvén tehát l, l', l'', \dots összrendezőkből a $\lambda_1, \dots \lambda_6$ összrendezőket, vagy hozzájuk fűzvé a nem észlelteket, az ezeknek (2) egyenletrendszerünkben megfelelő egyenletek a következő egyszerűbb alakot veszik fel:

$$0 = d\lambda_1$$

$$0 = d\lambda_2$$

$$0 = d\lambda_3$$

$$0 = d\lambda_4$$

$$0 = d\lambda_5$$

$$0 = d\lambda_6$$

ezen egyenletekből elesik az (megjegyzésünk folytán), mely egy nem észlelt λ -nak felel meg, továbbá mint azonos egyenlet az, mely oly λ -nak felel meg, melynek javítása $= 0$ tétetik.

$\lambda_1, \dots \lambda_6$ constansaink tehát a földközepi összrendezők közül választandók; e körülmény, tekintve a szükségelt különböző hányadosokat, semmikép sem könnyíti számításunkat. A feladat ugyanis: egy földközepi összrendező abból eredő változását meghatározni, miszerint határozott más hat földközepi összrendező közül az egyik bizonyos kis növekedéssel szaporodik, míg a többi öt változatlan marad, egyenes megoldást tekintve eléggé bonyolodott, s ezen körül-

ménynek kellend $\lambda_1, \dots \lambda_6$ constansaink közelebbi választását eldöntenie.

Bár mit jelentsenek most $\lambda_1, \dots \lambda_6$ constansaink, a szóban lévő különbzéki hányadosok meghatározására a következő tapasztalati út nyílik:

Kiindulási $\lambda_1, \dots \lambda_6$ constansokkal leszarmaztatjuk t, t', t'', \dots időkre a földközepi l_0, l_0', l_0'', \dots összrendezőket; azután ama λ változtával, mely szerint a különbzéki hányadosokat keressük — például λ_1 -t változtatva

$$\lambda_1 + \delta\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6$$

constansokkal leszarmaztatjuk másod izben t, t', t'', \dots időkre a földközepi összrendezőket, melyeket e betűkkel jelelünk:

$$l_1, l_1', l_1'', \dots;$$

ez utóbbiakból levonván az előbbieket, s feltéve, hogy $\delta\lambda_1$ elsőrendű kis mennyiség, lesz:

$$\left\{ \begin{array}{l} l_1 - l_0 = \frac{dl_0}{d\lambda_1} \cdot \delta\lambda_1 \\ l_1' - l_0' = \frac{dl_0'}{d\lambda_1} \cdot \delta\lambda_1 \\ l_1'' - l_0'' = \frac{dl_0''}{d\lambda_1} \cdot \delta\lambda_1 \\ \dots \end{array} \right.$$

mi által a λ_1 szerinti különbzéki hányadosok mindegyike ismeretes. Hasonlókép járhatunk el a többi $\lambda_2 \dots \lambda_6$ összrendező bármelyikével. A t, t', t'', \dots időkhöz tartozó $l \dots$ földközepi összrendezőknak a $\lambda \dots$ földközepi összrendezőkből való leszarmaztatása pedig legegyszerűbben az úton fog történni, hogy a $\lambda \dots$ -ból kiszámítjuk az $e \dots$ elemeket, s ezekből viszont az $l \dots$ összrendezőket.

$\lambda_1 \dots \lambda_6$ földközepi összrendező közelebbi meghatározásánál tehát azon fogunk lenni, hogy ezekből az $e \dots e_6$ constansok lehetőleg könnyen számíttathassanak ki. Ama hat földközepi összrendező pedig, melyből kiindulván legrövidebb úton érkezünk a pálya $M, \pi, \Omega, i, \varphi, \mu$ elemeihez, két földközepi hely összes összrendezői, azaz két helynek egyenes emelkedése, elhajlása és távolsága, vagy hossza, szélessége s távolsága (L. Theoria motus 140. l.). Ezek tehát $\lambda_1 \dots \lambda_6$

mennyiségek helyébe választandók; ama constansokul pedig, melyek változásaival a feltételei egyenletek kielégítendők, azonnal a két távolság ajánlkozik, míg a pálya folyton a két látszólagos helyen megy át.

Eme Gauss által felállított példájára igen gyakran felhasznált pályajavítási módszer a változtatott földtőli távolságok módszerének nevezetik.

Ama két észlelet helyébe, melynek hosszai s szélességei hibátlan constansoknak tétetnek fel, a mint már említve volt, nem csak lehetőleg szoros, hanem oly bolygóhelyek észleleteit is kell választanunk, melyeknek változásai folytán — ha ilyeneket fölteszünk — a belőlök számított többi hely összerendezői, vagyis — a mi evvel bizonyos mérvben egyenlő — a belőlök számított $e_1 \dots e_n$ elemek igen nagyon, vagyis túlságosan ne változzanak. Különben ugyanis a változtatott távolságok segélyével csak olyan pályák közül választanók ki a legvalószínűbbet, melyeknek mindegyike tetemesen elüt a valóságtól, s ezen eset, valamint az, hogy a nevezett két észlelet nagyobb hibákkal birna, úgy lenne észrevehetővé, miszerint a feltételei egyenletek nem elégtetethetnének ki kellően. Egyébiránt ezen elővigyázatunk annál kevésbé fog nehézséggel járni, miután, feltéve hogy az észleleti anyagból, vagyis a normálhelyekből e két észlelet helyébe — világos okból — olyanokat választunk, melyek között lehető nagyobb időköz s tehát hosszabb pályadarab van, csak amaz esetet kellend kikerülnünk, hogy az e két földközepi helynek megfelelő napközepi helyek közel szembenállók vagy együttállók ne legyenek (Theoria motus 224. l.), a mi már a számítás első lépésénél ki fog világítani.

A különbzéki hányadosok fenn leirt közvetett meghatározása annyiban tekinthető kerülésnek, a mennyiben a különféle felvételtől kiindulván, csak az elemeken át érkezünk a mindenkori felvételtől kiszámított földközepi helyekhez. Gyakorlatilag véve ezen körülmény épen nem terheli a számítást, a mennyiben az egész számítási eljárás, még tekintetbe vevén, hogy egy kiindulási felvételt, az első távolság szerinti különbzéki hányadosok meghatározására egy másodikat, a második távolság szerinti különbzéki hányadosokra egy

harmadikat s utóvégre a legvalószínűbbet, tehát összesen négy felvételt kellend keresztülszámítunk, sok bajba épen nem kerül, miután ezen módszernél másrészt a feltételei egyenletek sokasítása, mind felállításukat, mind megoldásukat nézve, felette csekély mérvben nagyobbítja a munkát. Elméleti szempontból azonban s azon tekintetből, hogy ezen módszer leginkább ott fog alkalmazásra kerülni, a hol az előállítandó észleletek az egész pályának csak rövidebb részét foglalják el, s hogy kiegyenlítési számításunkban csak az ezen pályadarabon történendő fölvételi változások képesek figyelmünket igénybe venni: az akkép átváltoztatandó módszer, miszerint a 2. összerendezők szerinti különbzéki hányadosok egyenes uton határozandók, kétség kívül elsőséggel fog birni (L. Safford módszerét.)

Mi Freia bolygó feletti számításainkban a Gauss-féle módszert kétszer alkalmaztuk; először az első két szembenállás egyes észleletein alapuló elemrendszer kiszámítására, másodsor az első három szembenállás normalhelyeinek előállítására. Az első számításra nézve a következő öt — észleletjegyzékünkben könnyen megismerhető — észleletet választottuk, melyek átváltoztatva hosszakká s szélességekkel, megszabadítva irányferdülés és látköztől, s átvive az 1864.0 közép éjgyenre, ezek:

	berlini közép idő		hossz 1864.0		széless. 1864.0
1862 oktob.	24. 11 ^h 17 ^m 48. ^s 0		24° 25' 2."05	+	0° 20' 8."39
	novbr. 27. 12 41 53.6		19 36 42.15	—	0 0 46.90
1864 febr.	2. 10 30 47.7	129 8 7.95		—	3 4 37.13
	ápril. 2. 9 16 36.8	124 53 9.56		—	2 18 53.54
	május 9. 9 50 13.3	131 25 26.57		—	1 48 48.43

A pályát az első s utolsó helyen keresztül fektetvén, kiindulási távokul azokat vettük, melyek az A. N. 1471-ben tartalmazott, már értekezésünk bevezetésében említett, elemrendszerből folynak; a második és harmadik felvételt úgy képeztük, hogy az elsőben az első, s az utóbbiban az utolsó hely távolságának logaritmusát 0.001 mennyiséggel szaporítottuk. A kiindulási, a nappályára vetített távolságok logaritmusai ezek:

0.3116226

0.4686125

a jellemzett három felvétel összehasonlítása az észleletekkel ez (a három első szám mindenütt a három hosszra vonatkozik):

$-1 + l_0$	$l_1 - l_0$	$l_2 - l_0$
$+ 6.''0$	$+ 5.''2$	$+ 27.''6$
$+ 140.3$	$- 106.3$	$+ 86.0$
$+ 76.7$	$- 32.7$	$+ 72.6$
$- 3.9$	$+ 3.1$	$- 0.8$
$+ 0.5$	$- 1.4$	$+ 12.2$
$- 3.4$	$- 0.1$	$+ 4.6$

s helyettesítvén ezen értékeket egymásután

$$0 = -1 + l_0 + (l_1 - l_0)x + (l_2 - l_0)y$$

feltételeti egyenletbe, erednek mint legvalószínűbb megoldások:

$$x = +0.8712$$

$$y = -0.5788;$$

a kiindulati távolságok logaritmusainak legvalószínűbb javításai tehát ezek: $+0.0008712$ és -0.0005788 , s az ezekkel eredő legvalószínűbb felvétel következőleg állítja elő normalhelyeinket (megegyezőleg a feltételeti egyenletekben hátra maradó hibákkal):

idő	Obs.—Calc.	
	hossz.	széless.
1862. oktob. 24
novbr. 27	$+5.''4$	$+0.''4$
1864. febr. 2	$+1.9$	$+7.9$
április 2	-6.3	$+6.2$
május 9

továbbá a legvalószínűbb elemek magok, melyeken át ezen összehasonlításhoz jutottunk, ezek:

1) elemek.

időpont 1862. okt. 24. berlini 0ⁿ

$$M = 312^\circ 2' 57.''3$$

$$\pi = 93 15 9.6$$

$$\varrho = 213 3 24.8$$

$$i = 2 1 54.8$$

$$\varphi = 10 51 2.8$$

} 1864.0 köz. éjegyén.

$$\log a = 0.5302237$$

$$\mu = 568.''4221.$$

Az 1865-diki szembenállásnak előreszámítása tekintetében az 1862. és 1864-diki normalhelyek közül a II. és IV. mint a legszámosabb észleleteken alapuló helyek hibanélkülieknek vétettek fel; a kiindulási távolságok a naplókából vétettek, még pedig a nappályára való vetületek logaritmusai gyanánt:

$$0.3352900$$

$$0.3922900,$$

továbbá a második felvétben az első szám, a harmadik felvétben a második szám ezen mennyiséggel: 0.0003 kisebbített.

De ezekelőtt a normalhelyek az 1863. július 27. óta történt háborok befolyásától megszabadítottak a következő mennyiségek hozzáadásával:

norm. h.	α -hoz	δ -hoz
I.	+ 2."42	+1."46
II.	+ 1.09	+0.77
III.	+ 8.43	—1.80
IV.	+10.68	—2.26
V.	+10.38	—2.49

ugy hogy az így változtatott normalhelyekből származó elemrendszer 1863. július 27-dikén fog érintkezni. A három jellemzett felvétel sorban az I., III. és V. normalhely számára (kezdőn az egyenes elkelkedésekkel) ezt eredményezi:

$-1 + l_0$	$l_1 - l_0$	$l_2 - l_0$
— 6."05	+ 2."70	+ 6."55
— 3.43	+21.70	— 2.70
—14.34	— 6.73	+11.60
— 8.33	+ 1.88	+ 2.21
+ 6.08	— 5.01	— 1.27
— 0.20	+ 1.61	— 2.30

s ezekből:

$$x = + 0.3416$$

$$y = + 1.3264,$$

mikkel a távolságok logaritmusainak legvalószínűbb változásai: — 0.0001025 és — 0.0003979.

Az így eredő 4-dik felvétel következőleg elégíti ki a (háboroktól megszabadított) normalhelyeket;

idő	Observ.—Calc.	
	egy. emelk.	elhajl.
1862. okt. 28.425	—3."1	+4."9
nov. 20.955
1864. febr. 9.628	—0.7	—2.5
ápr. 7.299
máj. 2.552	+1.2	+2.7

az elemek pedig ezek:

2) elemek.

érintés 1863. július 27.0

időpont 1863. január 0.0

$$M = 322^{\circ} \quad 41' \quad 14.''5$$

$$\pi = 93 \quad 12 \quad 6.0$$

$$\Omega = 212 \quad 58 \quad 19.2$$

$$i = 2 \quad 1 \quad 51.0$$

$$\varphi = 10 \quad 49 \quad 54.9$$

$$\log a = 0.5300355$$

$$\mu = 568.''7916.$$

1860.0 közép éjegyén

Hogy az 1865. május hónapban történendő észleletek összehasonlítására újra javított elemeket használhassunk, e végre az ép leírt kiegyenlítéshez még a VI. és VII. normalhelyt is kapcsoltuk. Megszabadítván ezeket a háborok befolyásától, mi a következő mennyiségek

norm. h.	α -hoz	δ -hoz
VI.	—1' 7."30	+22."25
VII.	—1 8.49	+23.54

hozzáadásával történik, s összehasonlítván ezeket az előbbi felvételek három elsejével, a következő számok jönnek ki:

—1 +1 ₀	l ₁ — l ₀	l ₂ — l ₀
—720."68	+64."29	+421."19
—719.26	+59.47	+424.33
+232.08	—22.16	—134.14
+246.43	—21.09	—142.49;

az összes tiz feltételeli egyenlet megoldásai ezek:

$$x = +0.4498$$

$$y = +1.6392.$$

Ezen negyedik felvétel vagyis a II. és IV. normalhelyeken alapított ötödik felvétel most ekkép elégíti ki a normalhelyeket (a másodperc századrészei a végett tételnek ki, mert ezen összehasonlítás későbbi szigorú elemjavításunknak szolgálанд alapjául) :

norm. h.	α (O—C)	δ (O—C)
I.	—4."98	+4."12
II.	—0.03	—0.02
III.	—2.39	—1.75
IV.	+0.05	—0.03
V.	—1.86	+3.22
VI.	—0.15	—1.97
VII.	—4.47	—3.11

s az elemek magok ezek :

2^a) elemek.

érintés 1863 július 27.0

$$\begin{aligned}
 M 1863.0 &= 322^{\circ} \quad 38' \quad 53.''63 \\
 \pi &= 93 \quad 13 \quad 58.06 \\
 \Omega &= 212 \quad 58 \quad 21.41 \\
 i &= 2 \quad 1 \quad 50.82 \\
 \varphi &= 10 \quad 49 \quad 12.00
 \end{aligned}
 \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} 1860.0 \text{ k. éjegyén}$$

$$\begin{aligned}
 \log a &= 0.5299038 \\
 \mu &= 569.''0505.
 \end{aligned}$$

Az 1865. májusi s az 1866-diki napló is ez utolsó elemekkel lévén számítva, a naplójavításoknak a második cikkenben kitett középszámait :

norm. h.	α (O—C)	δ (O—C)
VIII.	—1."50	—3."91
IX.	—13.11	—4.47

azonnal fentebbi számtárunk folytatásaul vehetők. Végre tekintetbe vévén a háboroknak javításait, az ép kitüntetett eltérésekből még a következő mennyiségek vonandók le :

norm. h.	(B—A) háborok	
I.	— 0."74	—0."34
II.	— 0.56	—0.26
III.	+ 0.13	—0.05
IV.	+ 0.24	—0.05
V.	+ 0.35	—0.08
VI.	+ 3."72	—0."78
VII.	+ 4.17	—0.97
VIII.	+ 4.36	—1.15
IX.	—19.83	+2.13

mi által normalhelyeink egészen szigorú összehasonlítását nyerjük.

Számításunk folytatására nézve az 1860.0 közép éjegy helyébe, melyre a 2' elemek vonatkoznak, az 1870.0-dikét is hozzuk be. Ennek számára származtattuk le a pálya fekvését határozó elemek praecessióit:

10 évi praecessiók (1870—1860)

$$\begin{aligned}\Omega & \dots\dots + 9' \quad 47."14 \\ i & \dots\dots - 3.63 \\ \pi & \dots\dots + 8 \quad 22.38\end{aligned}$$

mikkel az előbbi (2') értékekből találhatók:

$$\left. \begin{aligned}\pi &= 93^\circ \quad 22' \quad 20."44 \\ \Omega &= 213 \quad 8 \quad 8.55 \\ i &= 2 \quad 1 \quad 47.19\end{aligned} \right\} 1870.0 \text{ k. éjegyén.}$$

az egyenlítőre való átváltoztatás pedig adja (a nappálya ferdeségének $e(1860.0) = 23^\circ 27' 26."74$ és $e(1870.0) = 23^\circ 27' 22."06$ értékeivel):

1860.0	1870.0
$i_0 = 21^\circ 46' 48."78$	$21^\circ 46' 59."20$
$\omega = 357 \quad 1 \quad 14.17$	$357 \quad 0 \quad 33.82$
$\pi_0 = 93 \quad 0 \quad 14.46$	$93 \quad 8 \quad 33.73$

a mely mennyiségek által előbbi, a nappályára vonatkozó π , Ω , i elemek helyettesíthetők. Továbbá az 1870.0 éjegyene vonatkoztatott $2'$ elemekkel s (B) háborokkal a VI—IX. normalhelyeket egyenesen is hasonlítottuk össze, s az ebből eredő α (O—C) és δ (O—C) mennyiségeket (melyek úgy szólván tökéletesen össze vágnak a fennebb B)—A) segélyével nyert szigorú eltérésekkel) alapjául vettük az újonnan következő kiegyenlítési számításnak.

Ámde kilencz normalhelyünk már oly jó észleleti anyagot képez, hogy ebben indokot láttunk egy egészen szigorú pályajavításra. E célra e czikk kezdetén kitett (1) egyenlet-rendszert állítjuk fel, ismeretleneknek vevén a következő elemek :

$$i_0, \Omega_0, \pi_0, M_0, \varphi, \mu'$$

legvalószínűbb változásait, melyek közül :

$$M_0 = M. 1863 \text{ jan. } 0.0$$

s a számítás kényelmére

$$\mu' = 1000. \mu$$

vétetett fel, $(-1 + l_0)$ mennyiségek helyébe pedig a következő kiindulási eltérések — ellenkező jegyekkel — helyettesítendők :

	norm. h.	α (O—C)	δ (O—C)	észl. szám
	I.	—4."24	+4."46	5.2
	II.	+0.53	+0.24	4
	III.	—2.52	—1.70	4
(2')	IV.	—0.19	+0.02	10.9
	V.	—2.21	+3.30	8.7
	VI.	—3.89	—1.26	4
	VII.	—8.83	—2.19	7
	VIII.	—5.76	—2.90	5
	IX.	+6.79	—6.68	3.

A különbözőki hányadosokat illetőleg Európa bolygó feletti értekezésünkben felhozottakra utasítunk. Így erednek a következő feltételei egyenletek :

egyes emelkedés számára

0 =	0.6274	+	n 9.4033	d $\dot{\iota}_0$	+	8.7891	d Ω_0	+	0.1479	d π_0	+	0.2310	d M_0	+	n 0.4400	d φ	+	n 9.1156	d μ'
0 =	n 9.7243	+	n 9.4395	d $\dot{\iota}_0$	+	8.7445	d Ω_0	+	0.1090	d π_0	+	0.1936	d M_0	+	n 0.4050	d φ	+	n 9.1043	d μ'
0 =	0.4014	+	9.4442	d $\dot{\iota}_0$	+	n 7.7455	d Ω_0	+	0.1810	d π_0	+	0.3265	d M_0	+	0.2940	d φ	+	9.9191	d μ'
0 =	9.2787	+	9.2052	d $\dot{\iota}_0$	+	8.0529	d Ω_0	+	0.0553	d π_0	+	0.1946	d M_0	+	0.2117	d φ	+	9.7992	d μ'
0 =	0.3444	+	9.1179	d $\dot{\iota}_0$	+	8.3571	d Ω_0	+	9.9939	d π_0	+	0.1247	d M_0	+	0.1870	d φ	+	9.7520	d μ'
0 =	0.5900	+	n 9.3089	d $\dot{\iota}_0$	+	8.6563	d Ω_0	+	0.1164	d π_0	+	0.0642	d M_0	+	0.3635	d φ	+	9.9945	d μ'
0 =	0.9460	+	n 9.3914	d $\dot{\iota}_0$	+	8.6763	d Ω_0	+	0.1282	d π_0	+	0.0775	d M_0	+	0.3727	d φ	+	0.0007	d μ'
0 =	0.7604	+	n 9.4247	d $\dot{\iota}_0$	+	8.6532	d Ω_0	+	0.0949	d π_0	+	0.0444	d M_0	+	0.3382	d φ	+	9.9620	d μ'
0 =	n 0.8319	+	n 8.8575	d $\dot{\iota}_0$	+	n 8.9974	d Ω_0	+	0.1566	d π_0	+	0.0044	d M_0	+	9.7728	d φ	+	0.1035	d μ'

elhajlás számára

0 =	n 0.6493	+	9.8434	d $\dot{\iota}_0$	+	n 9.6825	d Ω_0	+	9.6959	d π_0	+	9.7788	d M_0	+	n 9.9881	d φ	+	n 8.6658	d μ'
0 =	n 9.3802	+	9.8697	d $\dot{\iota}_0$	+	n 9.6337	d Ω_0	+	9.6686	d π_0	+	9.7516	d M_0	+	n 9.9672	d φ	+	n 8.6867	d μ'
0 =	0.2122	+	0.0169	d $\dot{\iota}_0$	+	9.6140	d Ω_0	+	n 9.5789	d π_0	+	n 9.7211	d M_0	+	n 9.7136	d φ	+	n 9.3276	d μ'
0 =	n 8.3010	+	9.7948	d $\dot{\iota}_0$	+	9.5778	d Ω_0	+	n 9.4303	d π_0	+	n 9.5686	d M_0	+	n 9.5905	d φ	+	n 9.1764	d μ'
0 =	n 0.5185	+	9.6691	d $\dot{\iota}_0$	+	9.5436	d Ω_0	+	n 9.4071	d π_0	+	n 9.5384	d M_0	+	n 9.5985	d φ	+	n 9.1641	d μ'
0 =	0.1004	+	n 9.7888	d $\dot{\iota}_0$	+	9.6512	d Ω_0	+	n 9.6127	d π_0	+	n 9.5586	d M_0	+	n 9.8578	d φ	+	n 9.4920	d μ'
0 =	0.3404	+	n 9.8503	d $\dot{\iota}_0$	+	9.6480	d Ω_0	+	n 9.6527	d π_0	+	n 9.6019	d M_0	+	n 9.8972	d φ	+	n 9.5252	d μ'
0 =	0.4624	+	n 9.8681	d $\dot{\iota}_0$	+	9.6048	d Ω_0	+	n 9.6385	d π_0	+	n 9.5894	d M_0	+	n 9.8840	d φ	+	n 9.5044	d μ'
0 =	0.8248	+	n 0.1238	d $\dot{\iota}_0$	+	8.7784	d Ω_0	+	n 8.8289	d π_0	+	n 8.6807	d M_0	+	n 8.5797	d φ	+	n 8.7576	d μ'

s egy-egy egyenlet sulyával (eltekintve minden másféle különböztetéstől az észleletek szorosságát illetőleg) a hozzátartozó észleleti szám azaz az egybekapcsolt észleletek száma veendő. Átváltoztatván tehát az egyenleteket sulyegységüekké, mindenikök az észleleti szám négyzetgyökével szorozandó.

Azon feltétel, hogy a sulyegységű egyenletekben hátra maradó hibák négyzeteinek összege legkisebb értékű legyen, a következő meghatározási egyenleteket adja:

$$\begin{aligned}
 0 &= -85.806 + 27.8537 d_i - 2.2642 d\Omega - 0.7311 d\pi - 0.6865 dM_0 + 2.6516 d\varphi + 0.2291 d\mu' \\
 0 &= +23.837 - 2.2642 d_i' + 7.1309 d\Omega_0 - 4.9391 d\pi_0 - 5.4066 dM_0 - 5.3864 d\varphi - 2.9155 d\mu' \\
 0 &= +155.053 - 0.7311 d_i - 4.9391 d\Omega_0 + 85.8440 d\pi_0 + 96.3588 dM_0 + 65.5895 d\varphi + 43.8977 d\mu' \\
 0 &= +170.013 - 0.6865 d_i - 5.4066 d\Omega_0 + 96.3588 d\pi_0 + 113.0894 dM_0 + 68.4005 d\varphi + 46.0476 d\mu, \\
 0 &= +218.466 + 2.6516 d_i - 5.3864 d\Omega_0 + 65.5895 d\pi_0 + 68.4005 dM_0 + 227.9953 d\varphi + 70.3440 d\mu, \\
 0 &= +85.329 + 0.2291 d_i - 2.9155 d\Omega_0 + 43.8977 d\pi_0 + 46.0476 dM_0 + 70.3440 d\varphi + 31.6148 d\mu'
 \end{aligned}$$

melyeknek megoldásai:

$$\begin{aligned}
 d_i &= + 2.74 \dots\dots\dots 27.01 \text{ sulyal} \\
 d\Omega_0 &= - 3.96 & 6.64 \\
 d\pi_0 &= - 23.83 & 0.64 \\
 dM_0 &= + 11.63 & 1.81 \\
 d\varphi &= - 5.58 & 14.35 \\
 1000. d\mu &= + 25.48 & 0.59.
 \end{aligned}$$

A legvalószínűbb elemek tehát ezek:

3) elemek.

érintés 1863 július 27.0

$$M 1863.0 = 322^{\circ} 39' 5''.26$$

$$\pi = 93 \quad 21 \quad 56.98$$

$$\Omega = 213 \quad 9 \quad 27.09$$

$$i = 2 \quad 1 \quad 45.86$$

$$\varphi = 10 \quad 49 \quad 6.42$$

$$\log a = 0.5298909$$

$$\mu = 569.''07598$$

1870.0 k. éjegyén.

S a hátra maradó hibák mind a feltételeleti egyenletekből, mind az egyenes összehasonlításból következőleg erednek:

normalhely		$\alpha(O-C)$		$\delta(O-C)$	
Sz.	év	egy. összh.	felt. egy.	egy. összh.	felt. egy.
I.	1862	-1.''74	-1.''64	+1.''27	+1.''24
II.	"	+2.95	+3.03	-2.86	-2.88
(3) III.	1864	-1.92	-1.99	-3.22	-3.31
IV.	"	+1.46	+1.34	-0.61	-0.68
V.	"	-0.29	-0.35	+2.88	+2.85
VI.	1865	+2.10	+2.24	+0.48	+0.53
VII.	"	-2.39	-2.22	-0.46	-0.41
VIII.	"	+0.56	+0.72	-1.32	-1.26
IX.	1866	-0.14	-0.01	-2.74	-2.60

A hibanégyzetek összege, mely a kiegyenlítés előtt = 1408.89 volt, a kiegyenlítés által 318.37-re szállt le, a mely értékből a súlyegység közép hibájaul:

$$\pm 5.''15$$

ered.

Az 1867-diki szembenállás észleleteiből képezett normalhely (2') számtárhoz a következő sort függeszti:

norm. h. $\alpha(O-C)$ $\delta(O-C)$ észl. száma

$$X \quad +23.''86 \quad +6.''76 \quad 4$$

Tekintetbe véve 3) és 2') elemek közötti különbségeket, azaz szorozván ezeket az 1867. aug. 2.521-re számított különbszéki hányadosokkal s összeadván a szorzatokat, ered:

$$3) - 2') \dots\dots\dots +31.''65 \quad +6.''33$$

s kivonva ezen számokat a fentebbiekből, lesz mint X. normalhely eltérése 3) elemrendszertől:

$$\begin{array}{lll} \text{normalhely} & \alpha(O-C) & \delta(O-C) \\ X \text{ 1867.} & -7.''79 & +0.43, \end{array}$$

a mely sor a (3) alatti akhoz csatlakozik. Ámbár ezen számok igen is kielégítők, miután az 1866-diki normalhely, azaz a kiegyenlítésbe kapcsolt normalhelyek utolsója óta $13\frac{1}{2}$ hónap folyt le, mégis a kiegyenlítést az 1867-diki szembenállásra is áttérjesztendők, 18 feltételei egyenletünkhöz a következő kettőt függesztjük:

$$\begin{aligned} 0 &= n \cdot 1.3777 + 9.4203 d_i + n \cdot 8.1824 d\Omega_0 + 0.1348 d\pi_0 + 0.0102 dM_0 + n \cdot 0.1504 d\varphi + 0.2330 d\mu' \\ 0 &= n \cdot 0.8300 + n \cdot 0.0014 d_i + n \cdot 9.5274 d\Omega_0 + 9.5196 d\pi_0 + 9.3978 dM_0 + n \cdot 9.5504 d\varphi + 9.6249 d\mu' \end{aligned}$$

Az innen változott meghatározási egyenletek:

$$\begin{aligned} 0 &= -83.798 + 32.1561 d_i - 0.9287 d\Omega_0 - 0.6227 d\pi_0 - 0.6118 dM_0 + 2.5883 d\varphi + 0.3376 d\mu' \\ 0 &= +34.397 - 0.9287 d_i + 7.5855 d\Omega_0 - 5.4678 d\pi_0 - 5.8056 dM_0 - 4.8219 d\varphi - 3.5875 d\mu' \\ 0 &= +15.941 - 0.6227 d_i - 5.4678 d\Omega_0 + 93.7322 d\pi_0 + 102.2742 dM_0 + 57.4070 d\varphi + 53.7837 d\mu' \\ 0 &= +65.553 - 0.6118 d_i - 5.8056 d\Omega_0 + 102.2742 d\pi_0 + 117.5310 dM_0 + 62.2565 d\varphi + 53.4707 d\mu' \\ 0 &= +362.997 + 2.5883 d_i - 4.8219 d\Omega_0 + 57.4070 d\pi_0 + 62.2565 dM_0 + 236.4944 d\varphi + 60.0758 d\mu' \\ 0 &= -89.261 + 0.3376 d_i - 3.5875 d\Omega_0 + 53.7837 d\pi_0 + 53.4707 dM_0 + 60.0758 d\varphi + 44.0207 d\mu' \end{aligned}$$

megoldásai ezek:

$$\begin{aligned} d_i &= +2.43 \dots\dots\dots 31.96 \text{ súlylyal} \\ d\Omega_0 &= -4.41 \quad 7.22 \\ d\pi_0 &= -19.91 \quad 1.58 \\ dM_0 &= +9.68 \quad 3.11 \\ d\varphi &= -4.58 \quad 117.38 \\ 1000 d\mu &= +20.44 \quad 4.99 \end{aligned}$$

Az újra javított elemrendszer ez:

3') elemek.

érintés 1863 július 27.0

$$M 1863.0 = 322^{\circ} 39' 3.''31$$

$$\pi = 93 \ 22 \ 0.95$$

$$\Omega = 213 \ 9 \ 25.76 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} 1870.0 \text{ köz. éjegyén.}$$

$$i = 2 \ 1 \ 46.22$$

$$\varphi = 10 \ 49 \ 7.44$$

$$\log a = 0.5298934$$

$$\mu = 569.''07094$$

s a normalhelyek előállítása a következő:

normalhely		α (O—C)		δ (O—C)	
Sz.	év	egy. összh.	felt. egy.	egy. összh.	felt. egy.
I.	1862	—1.''77	—1.''73	+1.''34	+1.''22
II.	"	+2.92	+2.94	—2.79	—2.87
III.	1864	—1.73	—1.54	—2.65	—2.88
(3')IV.	"	+1.48	+1.49	—0.21	—0.31
V.	"	—0.41	—0.23	+3.26	+3.14
VI.	1865	+1.88	+1.96	+0.57	+0.61
VII.	"	—2.63	—2.56	—0.39	—0.33
VIII.	"	+0.24	+0.34	—1.23	—1.19
IX.	1866	+1.97	+2.06	—3.21	—3.09
X.	1867	—1.03	—1.00	+1.58	+1.64.

Továbbá a kiindulati hibanégyzetek összege: 3868.91
leszállítatik a kiegyenlítés által: 352.13-ra, s a súlyegység
közép hibája:

$$\pm 5.''02$$

majdnem egyenlő előbb nyert értékével. Ha most mind a két
kiegyenlítésből eredt elemjavítások súlyait vesszük tekintetbe,
akkor ezen javítások közép hibái következőleg erednek:

			1-ső kiegy.	2-dik kiegy.
i_0 közép hibája :			$\pm 0.''99$	$\pm 0.''88$
Ω_0	"	"	2.00	1.86
π_0	"	"	6.46	3.98
M_0	"	"	3.86	2.84
φ	"	"	1.36	0.46
1000 μ	"	"	± 6.72	± 2.24

a mely számokból azt vesszük ki, hogy a két új feltételei egyenlet hozzájárultával kivált $d\varphi$ és $d\mu$ meghatározások szorossága fokoztatik. S valóban ha csak egy pillantást vetünk a hozzájárult s az előbbi feltételei egyenletekre, azonnal ama $d\varphi$ és $d\mu$ sulya többülésének kedvező körülmény tűnik szemünkbe, miszerint a nevezett ismeretlenek együtt-hatói első 18 egyenletünk mindegyikében egyenlő jegyűek, a két hozzájárult egyenletben pedig ellenkező jegyűek. Hasonlóan az 1868-diki szembenálláskor $d\varphi$ és $d\mu$ együtt-hatói szintén ellenkező jegyűek, s azonkívül számra nagyobb is mindkettő; találtatik ugyanis:

1868. september 24.0 számára:

$$\begin{aligned} \log \frac{d\alpha}{d\varphi} &= n.0.4343 & \log \frac{d\alpha}{d\mu} &= 0.4790 \\ \log \frac{d\delta}{d\varphi} &= n.0.0274 & \log \frac{d\delta}{d\mu} &= 0.0751 \end{aligned}$$

de miután ezen szembenállásnak eltérése 3') elemektől igen csekély (ez némileg megmagyarázható az ezen s az ezt megelőző 1867. szembenállás különbzéki hányadosok mivoltából) t. i. a következő:

normalhely	α (O—C)	δ (O—C)
XI. 1868.	+2."10	+3."14,

okot nem találtunk utolsó elemeinkben bár mit is javítani. Mi ezen elemeket azonban, melyek 1863. július 27.0 időpontban érintkeznek, Freia bolygó későbbi szembenállásai kiszámítására egy későbbi érintéspontra, még pe/lig 1872. január 1.0-re vittük át s ezen átvitel eredménye ez:

3') elemek

érintés 1872. január 1.0 (berl. idő)

$$M 1872. \text{ január } 1.0 = 120^\circ 16' 47.''34$$

$$\left. \begin{aligned} \pi &= 92 \quad 39 \quad 0.63 \\ \Omega &= 212 \quad 7 \quad 40.79 \\ i &= 2 \quad 2 \quad 48.39 \\ \varphi &= 10 \quad 5 \quad 30.26 \\ \log a &= 0.5322756 \\ \mu &= 564.''40794. \end{aligned} \right\} 1870.0 \text{ köz. éjegyén}$$

Végre ide még a napközel hosszának, a felszálló csomó hosszának s a pályahajlásnak az egyenlitőre átváltoztatott 3^a) elemrendszer szerinti értékeit tesszük:

érintés 1863 július 27.0			érint. 1872 jan. 1.0		
1860.0 köz. éjegy.			1870.0 k. éjegy.		
$\pi_0 =$	92° 59' 54."55		93° 8' 13."82	92° 25' 29."59	
$\Omega_0 =$	337 1 9.76	357 0 29.41	357 3 42.04		
$i_0 =$	21 46 51.21	21 47 1.63	21 44 54.65		

Az egyenlitői constansok s ezek változásai.

Freia bolygó derékszögü összerendezői leszarmaztatásában folyton a következő Gauss-féle képletek segítségével jártam el:*)

$$\begin{aligned}x &= k \sin (E + K) + \kappa \\y &= l \sin (E + L) + \lambda \\z &= m \sin (E + M) + \mu.\end{aligned}$$

Ezekben k, K, κ, \dots mennyiségek az elemekből számítandó s az időtől független „constansokat” jelölik, melyek kapcsolatban az idővel változó E középküli eltéréssel a bolygó helyét napközepi derékszögü összerendezőkben kifejezve adják. Magától értetődik, hogy ezen constansok, melyek számra kilenczen vannak, más értékekkel bírnak, ha x, y, z a nappályára vonatkoznak (a mily alakban mint nappályai constansok a különleges háborok számítására az előbbieken voltak szükségesek) s másokkal, ha x, y, z az egyenlitőre vonatkoznak, (a mily alakban mint egyenlitői constansok a földközepi egyenes emelkedés és elhajlásnak az elemekből való leszarmaztatására szükségeltettek). Idő folytával, mely alatt a földközepi helyek különböző elemek szerint számítandók, a mely eset a változtatott földtöli távolságok módszerénél használt felvételeknél, vagy általán az elemek többszöri javításánál fordul elő, az egyenlitői constansok számítása ép annyiszor lesz ismétlendő. Az ilyféle számításoknak nem csekély könnyítésére szolgál az, hogy olyan különbzék képletek vannak kéznél, melyek a constansok változásait az elemek változásai által fejezik ki. Ezáltal ugyanis lehetségessé

*) Theoria motus 55. l.

lesz, a constansoknak az elemekből szoros számítását egy igen csekélyded négyjegyű számítás által helyettesíteni, mely a meglevő szorosán számított constansok változásait az amazokhoz tartozó elemek változásának megfelelőleg adja, vagy pedig ha a constansokat közvetlen két különböző módszer szerint szoktuk biztosság kedvéért számítani, elegendő lesz, csak az egyik módszer szerint számított constansokat a különböző képletek segélyével nyert értékekkel ellenőrzés végett összehasonlítani.

Mi tehát — közlendők ama különböző képleteket, melyek nekünk eddig oly jó szolgálatot tettek, valamint azokat, melyek számításunk folytatásánál alkalmazandók — csak azt jegyezzük meg, hogy miután azon elemeket, melyek a pálya fekvését ismertetik, majd a szokásos kifejezőmód szerint a nappályára vonatkoztatjuk (π, Ω, i) majd az egyenlítőre (π_0, Ω_0, i_0), a mily alakban azok a legvalószínűbb pályaelemek meghatározására szolgáló különböző képleteinkben előfordulnak, tehát hasznos, a constansok változásait mind a nappályára, mind az egyenlítőre vonatkoztatott elemek változásainak megfelelőleg előállitnunk, s azonkívül még azon egyenleteket ide fűznünk, melyek segélyével az egyenlítőre vonatkoztatott elemek változásai ($d\pi, d\Omega, di$) átváltoztathatók a nappályára vonatkoztatott elemekéire ($d\pi, d\Omega, di$) s megfordítva. A képleteknek később következő öszletében előforduló betűk jelentése legvilágosabban az által állapittatik meg, hogy rövidleg leszármaztatjuk magokat az alap-egyenleteket s keresztülvisszük ezeknek különbözékelését.

A bolygó r és u sarkösszrendezői, melyek annak helyét a pályában meghatározzák, s melyek között r a vezérsugárt, u azon szögöt jelenti, melyet a vezérsugár a nappályabani csomóvonallal (a felszálló csomót értve) a mozgás irányában képez, — a pályasík fekvését jellemző i és Ω elemek segélyével sorban a következő derékszögű összrendezői rendszereket adják:

$$r \cos u$$

$$r \sin u$$

$$0$$

$$r \cos u$$

$$r \sin u \cos i$$

$$r \sin u \sin i$$

$$r \cos u \cos \Omega - r \sin u \sin i \sin \Omega$$

$$r \cos u \sin \Omega + r \sin u \sin i \cos \Omega$$

$$r \sin u \sin i$$

melyeknek jelentései közvetlen világosak.

Az utolsó összrendezők, melyek a „nappályaösszrendezőket“ állítják elő, s melyeket x y z -vel jelölünk, eme határozások segélyével:

$$\cos \Omega = \sin a \sin A$$

$$- \cos i \sin \Omega = \sin a \cos A \dots \dots \dots (1)$$

$$\sin \Omega = \sin b \sin B$$

$$\cos i \cos \Omega = \sin b \cos B$$

(a és b ama szögök, melyeket a pályasík YZ és ZX összrendezői síkokkal képez) a következő egyszerűsített alakot vesznek fel:

$$x = r \sin a \sin (u + A)$$

$$y = r \sin b \sin (u + B)$$

$$z = r \sin i \sin u$$

Hasonlag ha r és u_0 összrendezőkben indulunk ki, hol u_0 az egyenlítőbeni csomóvonaltól számítandó, szintúgy mint u a nappályábanitól volt számítandó, ered ugyanazon uton:

$$r \cos u_0 \cos \Omega_0 - r \sin u_0 \cos i_0 \sin \Omega_0$$

$$r \cos u_0 \sin \Omega_0 + r \sin u_0 \cos i_0 \cos \Omega_0$$

$$r \sin u_0 \sin i_0$$

a mely összrendezői rendszer — x_0 y_0 z_0 -vel jelölve — az „egyenlítői összrendezőket“ képviseli, s alkalmazván a hasonló meghatározásokat:

$$\cos \Omega_0 = \sin a_1 \sin A_1$$

$$- \cos i_0 \sin \Omega_0 = \sin a_1 \cos A_1 \dots \dots \dots (2)$$

$$\sin \Omega_0 = \sin b_1 \sin B_1$$

$$\cos i_0 \cos \Omega_0 = \sin b_1 \cos B_1$$

(a_1 és b_1 ama szögök, melyeket a pályasík $Y_0 Z_0$ és $Z_0 X_0$ síkokkal képez) ekkép is irathatik:

$$x_0 = r \sin a_1 \sin (u_0 + A_1)$$

$$y_0 = r \sin b_1 \sin (u_0 + B_1)$$

$$z_0 = r \sin i_0 \sin u_0$$

Továbbá ezen egyenlitői összrendezőkhöz az uton is juthatunk, ha x y z -összrendezőket ezen átváltoztatási képletekkel:

$$\begin{aligned}x_0 &= x \\ y_0 &= y \cos e - z \sin e \\ z_0 &= y \sin e + z \cos e\end{aligned}$$

(hol „ e “ a nappálya ferdesége) s nem különben ezen meghatározások segítségével:

$$\begin{aligned}\sin \Omega \cos e &= \sin b_0 \sin B_0 \\ \cos i \cos \Omega \cos e - \sin i \sin e &= \sin b_0 \cos B_0 \dots (3) \\ \sin \Omega \sin e &= \sin c_0 \sin C_0 \\ \cos i \cos \Omega \sin e + \sin i \cos e &= \sin c_0 \cos C_0\end{aligned}$$

átváltoztatjuk ezekké:

$$\begin{aligned}x_0 &= r \sin a \sin (u + A) \\ y_0 &= r \sin b_0 \sin (u + B_0) \\ z_0 &= r \sin c_0 \sin (u + C_0)\end{aligned}$$

Összehasonlítván x_0 y_0 z_0 kétféle kifejezését, a következő viszonyok állnak elő:

$$\begin{aligned}\sin a &= \sin a_1 \\ \sin b_0 &= \sin b_1 \\ \sin c_0 &= \sin i_0\end{aligned}$$

továbbá:

$$\begin{aligned}A &= A_1 + u_0 - u = A_1 + \Delta_0 \\ B_0 &= B_1 + u_0 - u = B_1 + \Delta_0 \dots \dots \dots (4) \\ C_0 &= u_0 - u = \Delta_0\end{aligned}$$

hol Δ_0 a nappálya- s az egyenlitőbeni csomóvonalok közötti szög, vagyis:

$$\Delta_0 = (\pi_0 - \circ) - (\pi - \Omega).$$

Immár avval foglalkozunk, hogy A , B , $\sin a$, $\sin b$ változásait kifejezzük Ω és i változásai által, továbbá A_1 , B_1 , $\sin a_1$, $\sin b_1$ változásait Ω_0 és i_0 -éi, végre B_0 , C_0 , $\sin b_0$, $\sin c_0$ -ét Ω , i , és e változásai által.

Erre (1) egyenleteink azonnal szolgáltatják:

$$\begin{aligned}\frac{dA}{d\Omega} &= \frac{\sin b}{\sin a} \sin (B - A) & \frac{dA}{di} &= \sin A \cos A \operatorname{tgi} \\ \frac{dB}{d\Omega} &= \frac{\sin a}{\sin b} \sin (A - B) & \frac{dB}{di} &= \sin B \cos B \operatorname{tgi}\end{aligned}$$

..... (⊙)

$$\frac{d \sin a}{d\Omega} = -\frac{\sin b}{\sin a} \cos(B-A) \quad \frac{d \sin a}{di} = -\cos A \cdot \operatorname{tg} i$$

$$\frac{d \sin b}{d\Omega} = \frac{\sin a}{\sin b} \cos(A-B) \quad \frac{d \sin b}{di} = -\cos B \cdot \operatorname{tg} i$$

A (2) és (1) egyenletrendszer hasonosságából pedig a betűk felcserélésével irathatik (ha $\sin a_1$, $\sin b_1$ és $(A_1 - B_1)$ mennyiségeket a velők egyenértékű: $\sin a$, $\sin b_0$ és $(A - B_0)$ által helyettesítjük):

$$\frac{dA_1}{d\Omega_0} = -\frac{\sin b_0}{\sin a} \sin(B_0 - A) \quad \frac{dA_1}{di_0} = \sin A_1 \cos A_1 \operatorname{tg} i_0$$

$$\frac{dB_1}{d\Omega_0} = \frac{\sin a}{\sin b_0} \sin(A - B_0) \quad \frac{dB_1}{di_0} = \sin B_1 \cos B_1 \operatorname{tg} i_0$$

$$\frac{d \sin a}{d\Omega_0} = -\frac{\sin b_0}{\sin a} \cos(B_0 - A), \quad \frac{d \sin a}{di_0} = -\cos A_1^2 \operatorname{tg} i_0$$

$$\frac{d \sin b_0}{d\Omega_0} = \frac{\sin a}{\sin b_0} \cos(A - B_0), \quad \frac{d \sin b_0}{di_0} = -\cos B_1^2 \operatorname{tg} i_0$$

Továbbá (3) egyenletrendszerünk — használván a meghatározásokat:

$$\sin e = \sin m \sin \varphi$$

$$\cos \Omega \cos e = \sin m \cos \varphi$$

$$-\cos e = \sin n \sin \chi$$

$$\cos \Omega \sin e = \sin n \cos \chi$$

(m és n) szögek elesnek) adja:

$$\frac{dB_0}{de} = -\frac{\sin c_0}{\sin b_0} \sin(C_0 - B_0)$$

$$= \frac{dB_0}{di} = \sin B_0 \cos B_0 \operatorname{tg}(i + \varphi)$$

$$\frac{dC_0}{de} = \frac{\sin b_0}{\sin c_0} \sin(B_0 - C_0)$$

$$= \frac{dC_0}{di} = \sin C_0 \cos C_0 \operatorname{tg}(i + \chi)$$

$$\frac{d \sin b_0}{de} = -\frac{\sin c_0}{\sin b_0} \cos(C_0 - B_0)$$

$$= \frac{d \sin b_0}{di} = -\cos B_0^2 \operatorname{tg}(i + \varphi)$$

$$\begin{aligned}\frac{d.l \sin c_0}{de} &= \frac{\sin b_0}{\sin c_0} \cdot \cos (B_0 - C_0) \\ &= \frac{d.l \sin c_0}{di} = -\cos C_0^2 \cdot \operatorname{tg} (i + \chi)\end{aligned}$$

azonkívül lesz:

$$\begin{aligned}\frac{dB_0}{d\Omega} &= \cos e \cdot \frac{\sin a}{\sin b_0} \cdot \sin (A - B_0) \\ \frac{dC_0}{d\Omega} &= \sin e \cdot \frac{\sin a}{\sin c_0} \cdot \sin (A - C_0) \\ \frac{d.l \sin b_0}{d\Omega} &= \cos e \cdot \frac{\sin a}{\sin b_0} \cdot \cos (A - B_0) \\ \frac{d.l \sin c_0}{d\Omega} &= \sin e \cdot \frac{\sin a}{\sin c_0} \cdot \cos (A - C_0)\end{aligned}$$

Ezen képletek szerint az 1860.0 közép éjegyenre átvitt
1) elemrendszerrel a következő számbeliek számítottak,
melyekben $d \log$ a közönséges logarok változásait jelenti,
még pedig a 7. tizedes egységében; azonkívül megjegyzendő,
hogy a $d \log \dots$ változásokat adó képletekben a másodper-
cekben kifejezett szögváltozások helyettesítendők:

$$\begin{aligned}dA &= +0.9997 d\Omega - 0.0162 di \\ dB_0 &= +0.9874 d\Omega - 0.2145 di - 0.0224 de \\ dC_0 &= +1.0714 d\Omega + 1.4622 di - 0.1403 de \dots (\alpha) \\ d \log \sin a &= -0.0121 d\Omega - 0.2213 di \\ d \log \sin b_0 &= -0.1602 d\Omega + 7.0814 di - 8.3976 de \\ d \log \sin c_0 &= +1.0917 d\Omega - 42.7696 di + 52.6255 de \\ dA_1 &= +0.9290 d\Omega_0 + 0.0193 di_0 \\ dB_1 &= +1.0764 d\Omega_0 - 0.0223 di_0 \dots \dots \dots (\beta) \\ d \log \sin a &= +0.1507 d\Omega_0 - 0.0197 di_0 \\ d \log \sin b_0 &= -0.1746 d\Omega_0 - 8.3862 di_0\end{aligned}$$

Továbbá ama gömbháromszög, mely a pályasík, a nap-
pálya s az egyenlítő által képeztetik, különbözőki egyenle-
tei ezek:

$$\begin{aligned}d\Omega_0 &= \frac{\sin i \cos A_0}{\sin i_0} d\Omega + \frac{\sin A_0}{\sin i_0} di - \cotgi_0 \sin \Omega_0 de \\ dA_0 &= \frac{\sin e \cos \Omega_0}{\sin i_0} d\Omega - \cotgi_0 \sin A_0 di + \frac{\sin \Omega_0}{\sin i_0} de \\ di_0 &= -\sin e \sin \Omega_0 d\Omega + \cos A_0 di + \cos \Omega_0 de\end{aligned}$$

$$d\Omega = \cos e \cdot d\Omega_0 + \cos i \cdot dA_0 - \sin e \sin \Omega_0 di_0$$

$$di = \frac{\sin e}{\sin \Omega} d\Omega_0 - \cotg \Omega \sin i \cdot dA_0 + \frac{\sin \Omega_0 \cos e}{\sin \Omega} \cdot di_0$$

$$de = -\cotg \Omega \sin e d\Omega_0 + \frac{\sin i}{\sin \Omega} dA_0 + \frac{\sin A_0 \cos i}{\sin \Omega} \cdot di_0$$

s helyettesítve bennök az 1) elemrendszer értékeit, ered:

$$d\Omega_0 = -0.0776 d\Omega - 1.5745 di + 0.1303 de$$

$$dA_0 = +1.0714 d\Omega + 1.4621 di - 0.1403 de$$

$$di_0 = +0.0207 d\Omega - 0.8116 di + 0.9986 de$$

$$d\Omega = +0.9174 d\Omega_0 + 0.9994 dA_0 + 0.0207 di_0$$

$$di = -0.7310 d\Omega_0 - 0.0546 dA_0 + 0.0877 di_0$$

$$de = -0.6132 d\Omega_0 - 0.0651 dA_0 + 1.0722 di_0$$

melyek kapcsolatban a (4) alattiakkal fentebbi (α) képleteket a (β) képletekké engedik átváltoztatni, s megfordítva.

u és u_0 mennyiségek a következő jelentésekkel is birnak:

$$u = v + \pi - \Omega$$

$$u_0 = v + \pi_0 - \Omega_0,$$

hol v a bolygó valódi eltérését jelöli. Helyettesítvén ezeket az egyenlit ői összrendezők kifejezéseibe, lesz:

$$x_0 = r \sin a \sin (v + A')$$

$$y_0 = r \sin b_0 \sin (v + B')$$

$$z_0 = r \sin c_0 \sin (v + C')$$

ha ugyanis:

$$A' = A + \pi - \Omega = A_1 + \pi_0 - \Omega_0$$

$$B' = B_0 + \pi - \Omega = B_1 + \pi_0 - \Omega_0$$

$$C' = C_0 + \pi - \Omega = \pi_0 - \Omega_0$$

A', B', C' változásai tehát ugy találtatnak, ha A, B_0, C_0 változásaihoz $d(\pi - \Omega)$ változást, avagy A_1 és B_1 változásaihoz $d(\pi_0 - \Omega_0)$ változást hozzáadjuk, C' változása pedig $(\pi_0 - \Omega_0)$ változásával azonos.

A második alak, melyben Gauss a napközepi derékszögű összrendezőket eléállítja, s melyet már e czikk kezdetén említettünk, az ép kitetből az uton foly, ha a valódi eltérést s a vezérsugárt helyettesítjük a középküli eltérés E s a pálya alakját határozó a és φ elemek által. Erre a következő két egyenlet áll:

$$r \cos v = a \cos E - a \sin \varphi$$

$$r \sin v = a \cos \varphi \sin E$$

s helyettesítés által fentebbi x_0 y_0 z_0 kifejezések a következőkbe mennek át:

$$x_0 = k \sin (E + K) + x$$

$$y_0 = l \sin (E + L) + \lambda$$

$$z_0 = m \sin (E + M) + \mu$$

k , K , x mennyiségek ekkép határozandók meg:

$$a \sin a \sin A' = k \sin K$$

$$a \cos \varphi \sin a \cos A' = k \cos K \dots \dots \dots (5)$$

$$- a \sin \varphi \sin a \sin A' = x$$

s hasonló egyenletek szolgálnak l , L , λ , m , M , μ mennyiségek meghatározására. A pálya nagyobbik féltengelye „a” és fennebbi színt „a” betűvel jelölt szög között felcserélés éppen nem lehetséges, miután a megnevezett szög képleteinkben kivétel nélkül a \sin . jeggyel együtt fordul elő, s tehát ezen szokásos megjelölésektől eltérni okunk nincs.

Freia bolygó feletti számításainkban az egyenlítői összrendezők az elemekből való kiszámításánál folyvást ez utóbbi képletekkel élünk (s a nappályai összrendezők kiszámításánál a hasonló képletekkel is). Továbbá amaz egyenleteket is származtattuk le, melyek k , K , x változásait adják kifejezve A' , $\sin a$, változásai, továbbá $d\varphi$ és da változások által, t. i.:

$$dK = \frac{\sin 2K}{\sin 2A'} dA' + \frac{1}{2} \operatorname{tg} \varphi \cdot \sin 2K d\varphi$$

$$dlk = \frac{1}{2} \sin \varphi \operatorname{tg} \varphi \sin 2K \cdot dA' + dl \sin a - \operatorname{tg} \varphi \cos K^2 \cdot d\varphi + d.l.a. \dots (6)$$

$$dx = x \operatorname{Cotg} A' dA' + x dl \sin a + x \cdot \operatorname{Cotg} \varphi d\varphi + x d.l.a. \dots \dots \dots$$

A számbeli műtét eredménye — használva az 1870.0 éjegyekre vonatkoztatott 3) elemrendszer értékeit — ez:

$$dK = + 1.0178 dA' + 0.0114 d\varphi$$

$$dL = + 0.9823 dB' - 0.0095 d\varphi$$

$$dM = + 0.9826 dC' - 0.0199 d\varphi$$

$$d \log k = + 0.0448 \cdot dA' + d \log \sin a - 4.0092 d\varphi + d \log a$$

$$d \log l = - 0.0376 \cdot dB' + d \log \sin b_0 - 0.0100 d\varphi + d \log a$$

$$d \log m = - 0.0788 \cdot dC' + d \log \sin c_0 - 0.0443 d\varphi + d \log a$$

$$dx = + 30.761 dA' + 0.0855 d \log \sin a + 9.423 d\varphi + 0.0855 d \log a$$

$$d\lambda = + 1.445 dB' - 1.3581 d \log \sin b_0 - 149.64 d\varphi - 1.3581 d \log a$$

$$d\mu = + 1.221 dC' - 0.5402 d \log \sin c_0 - 59.524 d\varphi - 0.5402 d \log a$$

dx , dl , $d\mu$ kifejezéseiben a $d\log Sina$, $d\log Sinb$, $d\log Sinc$ változások ugyanazon együttthatókkal birnak, mint $d\log a$, e tagok tehát összevonandók.

Az ugyanazon egy egyenletben előforduló vonalos és szögmennyiségekről szintaz áll, mit már előbbi számbeli képleteink mellé jegyeztünk, s mi minden következő efféle képletről jegyzendő meg, hogy t. i. a vonalos mennyiségek a hetedik tizedes egységében s a szögmennyiségek másodpercekben kifejezve értendők.

Az egyenlitői constansok 1863. július 27.0-dikén érintkező 3') elemrendszer szerint a következők:

	1860.0. éjegyén			1870.0. éjegyén		
K	183°	16'	8."08	183°	24'	39."44
L	92	43	14.31	92	51	21.51
M	95	52	24.90	96	1	15.14
$\log k$	0.5220492			0.5220507		
$\log l$	0.4978026			0.4977927		
$\log m$	0.0992520			0.0993028		
x	+ 0.0356093			+ 0.0371550		
λ	- 0.5899057			- 0.5898245		
μ	- 0.2346585			- 0.2346231		

s ezen számok abból eredő változásai, hogy a 3') elemek kis változásokat szenvednek, az előljáró különbzéki képletek segélyével könnyen számíthatók ki.

Kiegészítésül még azt jegyezzük meg, hogy (1) és (⊙) egyenletek a nappályai összszerendezők

$$x = r \sin a \sin (u + A)$$

$$y = r \sin b \sin (u + B)$$

$$z = r \sin i \sin u$$

kiszámítására szolgáló nappályai constansokat s ezeknek változásait tartalmazzák, s hogy ha A' , B' , C' mennyiségeket a következő jelentésben vesszük fel:

$$A' = A + \pi - \Omega$$

$$B' = B + \pi - \Omega$$

$$C' = \pi - \Omega$$

az (5) és (6) alatti egyenletek azonnal ide is alkalmazhatók.

Az 1872. január 1.0 érintéspontra átvitt 3') elemrendszer értékeivel ezen különbzéki kifejezéseket újra számított-

tuk ki, s egyszersmind dK , dk , dx változásokat mint $d\Omega$, di , $d\pi$ vagy $d\Omega_0$, di_0 , $d\pi_0$ változásoknak közvetlen függvényeit állítottuk elő az által, hogy a dA' , $d \sin a$, változásoknak a dK , dk , dx változásokat kifejező képletekben történendő helyettesítését általánosan, azaz a határozatlanul maradó $d\Omega$, di , $d\pi$, vagy $d\Omega_0$, di_0 , $d\pi_0$ mennyiségekkel vittük ki. Az így véglegesen eredő képletek nagy hasznavehetőséggel bírnak, mert a középküli eltéréshez csatlakozó egyenlitői constansok változásait kevés fáradsággal s közvetlen az elemek változásaiból adják. Ezen constansok — t. i. az 1872. január 1.0 időpontban érintkező 3') elemrendszer szerint számítva — ezek:

$$\begin{aligned}
 &1870.0 \text{ éjegyén} \\
 K &= 182^\circ 40' 30.''14 \\
 L &= 92 \quad 9 \quad 58.09 \\
 M &= 95 \quad 16 \quad 50.53 \\
 \log k &= 0.5254400 \\
 \log l &= 0.5002878 \\
 \log m &= 0.1010446 \\
 x &= +0.0274211 \\
 \lambda &= -0.5540805 \\
 \mu &= -0.2201876
 \end{aligned}$$

s az ugyanazon elemrendszer értékeivel számított különbéki kifejezések összelete — elhagyva dA' , dB' , dC' , $d \log \sin a$, $d \log \sin b_0$, $d \log \sin c_0$ kifejezéseit mint átmeneti eredményt — a következő:

$$\begin{aligned}
 d\Omega_0 &= -0.0791 d\Omega - 1.5418 di + 0.1285 de \\
 dA_0 &= +1.0728 d\Omega + 1.4321 di - 0.1383 de \\
 di_0 &= +0.0204 d\Omega - 0.8207 di + 0.9987 de \\
 d\Omega &= +0.9174 d\Omega_0 + 0.9994 dA_0 + 0.0204 di_0 \\
 di &= -0.7485 d\Omega_0 - 0.0569 dA_0 + 0.0884 di_0 \\
 de &= -0.6338 d\Omega_0 - 0.0672 dA_0 + 1.0736 di_0
 \end{aligned}$$

különválasztván a pálya alakját határozó elemek változásait a pálya fekvését határozókéitól, lesz végre:

$$dK = + 0.0083 d\varphi$$

$$dL = - 0.0067 d\varphi$$

$$dM = - 0.0163 d\varphi$$

$$d\log k = - 3.7392 d\varphi + d\log a$$

$$d\log l = - 0.0054 d\varphi + d\log a$$

$$d\log m = - 0.0317 d\varphi + d\log a$$

$$d\kappa = + 7.4695 d\varphi + 0.0631 d\log a$$

$$d\lambda = - 150.9318 d\varphi - 1.2758 d\log a$$

$$d\mu = - 59.9793 d\varphi - 0.5070 d\log a$$

$$dK = - 0.0003 d\Omega - 0.0163 di + 1.0156 d\pi$$

$$dL = - 0.0125 d\Omega - 0.2059 di + 0.9846 d\pi - 0.0217 de$$

$$dM = + 0.0717 d\Omega + 1.4103 di + 0.9848 d\pi - 0.1362 de$$

$$d\log k = - 0.0121 d\Omega - 0.2131 di + 0.0306 d\pi$$

$$d\log l = - 0.1570 d\Omega + 7.1424 di - 0.0248 d\pi - 8.3844 de$$

$$d\log m = + 1.0725 d\Omega - 43.4040 di - 0.0602 d\pi + 52.7178 de$$

$$d\kappa = - 0.0088 d\Omega - 0.4785 di + 28.9007 d\pi$$

$$d\lambda = + 0.1875 d\Omega - 9.3217 di + 1.0320 d\pi + 10.6750 de$$

$$d\mu = - 0.4730 d\Omega + 23.3974 di + 1.0022 d\pi - 26.8626 de$$

$$dK = - 0.0720 d\Omega_0 + 0.0193 di_0 + 1.0156 d\pi_0$$

$$dL = + 0.0750 d\Omega_0 - 0.0216 di_0 + 0.9846 d\pi_0$$

$$dM = - 0.9848 d\Omega_0 + 0.9848 d\pi_0$$

$$d\log k = + 0.1459 d\Omega_0 - 0.0185 di_0 + 0.0306 d\pi_0$$

$$d\log l = - 0.1734 d\Omega_0 - 8.3734 di_0 - 0.0248 d\pi_0$$

$$d\log m = + 0.0602 d\Omega_0 + 52.7792 di_0 - 0.0602 d\pi_0$$

$$d\kappa = - 2.0381 d\Omega_0 + 0.5472 di_0 + 28.9007 d\pi_0$$

$$d\lambda = + 0.2974 d\Omega_0 + 10.6610 di_0 + 1.0320 d\pi_0$$

$$d\mu = - 1.0022 d\Omega_0 - 26.7591 di_0 + 1.0022 d\pi_0$$

